FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1 & 2

Pisni izpit

4. september 1998

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri (120 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $f(t) = e^{-t^2}$.

a. (10) Izračunajte $e^{t^2} f^{(3)}(t)$.

Rešitev: Odvajamo po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2te^{-t^2} \\ f^{(2)}(t) &= -2e^{-t^2} + 4t^2 e^{-t^2} \\ f^{(3)}(t) &= 4te^{-t^2} + 8te^{-t^2} - 8t^3 e^{-t^2} \end{aligned}$$

Rezultat je

$$e^{t^2} f^{(3)}(t) = -8t^3 + 12t\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi odvod: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 3 točke.*
- *Tretji odvod: 3 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Definirajte $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} f^{(n)}(t)$. Funkcije $H_n(t)$ za $n \geq 2$ ustrezajo rekurzivni formuli

$$H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) = 0\,.$$

S pomočjo zgornje rekurzije pokažite, da je $H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$.

Rešitev: Odvajamo

$$\begin{aligned} H_n'(t) = \left((-1)^n e^{t^2} f^{(n)}(t)\right)' &= (-1)^n (2te^{t^2} f^{(n)}(t) + e^{t^2} f^{(n+1)}(t)) \\ &= 2tH_n(t) - H_{n+1}(t) \\ &= 2nH_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje produkta: 3 točke.*
- *Upoštevanje rekurzijske formule: 3 točke.*
- *Urejanje in rezultat: 4 točke.*

2. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^b \log^2(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Integriramo per partes.

$$\begin{aligned}
\int_0^b \log^2(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x &= x\cdot\log^2(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^b - \int_0^b \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\log(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x \\
&= b\cdot\log^2(b+\sqrt{1+b^2}) - \\
&\quad \left(2\sqrt{1+x^2}\log(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^b - 2\int_0^b \sqrt{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= b\cdot\log^2(b+\sqrt{1+b^2}) - 2\sqrt{1+b^2}\cdot\log(b+\sqrt{1+b^2}) + 2b
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 4 točke.*
- *Drugo integriranje per partes: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte izlimitirani integral

$$\int_0^\infty ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $u=e^{-x}$, torej $-e^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 n(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u \\
&= -(1-u)^n\Big|_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 4 točke.*
- *Pravilna uvedba nove spremenljivke: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Voda v rezervoarju ima prostornino V in v njej je raztopljeno c enot soli. Od zunaj priteka voda z jakostjo a prostorninskih enot na časovno enoto. V pritekajoči vodi je vsebovano b enot soli na enoto prostornine. Iz rezervoarja odteka voda z jakostjo a enot na časovno enoto. Privzemamo tudi, da je mešanje takojšnje. Označimo z $y(t)$ količino soli v rezervoarju v trenutku t. Funkcija y zadošča enačbi

$$y'(t) = ab - \frac{a}{V} y\,.$$

a. (10) Poiščite funkcijo y.

Rešitev: Enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{y'}{ab - ay/V} = 1$$

in integriramo. Dobimo

$$-\frac{V}{a}\log(ab - \frac{a}{V}y) = t - \frac{V}{a}\log(d)\,,$$

kjer je d konstanta, ki jo je potrebno še določiti iz začetnega pogoja $y(0) = c$. Če vstavimo v zgornjo enačbo $t = 0$, dobimo

$$\log(ab - \frac{a}{V}c) = \log(d)\,,$$

torej $d = a(b - c/V)$. Izrazimo še

$$y(t) = V(b - (b - c/V)e^{-at/V})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis v obliko za integriranje ali spoznanje, da gre za nehomogeno linearno enačbo: 3 točke.*
- *Integriranje ali rešitev ne homogene enačbe z nastavkom: 3 točke.*
- *Določitev konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Recimo, da je $b = 0$. V kolikšnem času bo v rezervoarju samo še polovico toliko soli kot na začetku?

Rešitev: V primeru, ko je $b = 0$, je rešitev enačbe zelo lahko najti, saj gre za homogeno linearno enačbo prvega reda. Dobimo

$$y(t) = ce^{-at/V}\,.$$

Iščemo čas T, ko bo $y(T) = c/2$, torej $e^{-aT/V} = 1/2$ ali $T = V\log(2)/a$.

Ocenjevanje:

- *Rešitev enačbe v primeru $b = 0$: 4 točke.*
- *Nastavek enačbe za T: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Naj bodo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ vektorji v $\mathbb{R}^3$, za katere velja $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$.

a. (10) Pokažite, da velja

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\times\mathbf{c} &= \mathbf{b}\times(-\mathbf{a}-\mathbf{b})\\ &= \mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathbf{b}\\ &= \mathbf{a}\times\mathbf{b}\end{aligned}$$

Podobno dobimo ostale identitete.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da enega od vektorjev izrazimo z ostalima dvema: 4 točke.*
- *Upoštevanje lastnosti vektroskega produkta: 4 točke.*
- *Urejanje členov: 2 točki.*

b. (10) Naj bo

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Poiščite vektor $\mathbf{x}$, tak da bo $(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{x})=1$, $(\mathbf{b},\mathbf{x})=0$ in $(\mathbf{a},\mathbf{x})=12$.

Rešitev: Iskani vektor lahko napišemo kot linearno kombinacijo

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{c}+\nu(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

za primerne konstante λ, μ in ν. Iz $(\mathbf{b},\mathbf{x})=0$ sledi $\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})+\mu(\mathbf{c},\mathbf{b})=0$, ali $-4\lambda-2\mu=0$. Iz $(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{x})=1$ sledi $\nu|\mathbf{a}\times\mathbf{c}|^2=1$, ali $\nu=1/8$. Zapišemo lahko

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{a}-2\lambda\mathbf{c}+\frac{1}{8}\mathbf{a}\times\mathbf{c}\,.$$

Uporabimo še tretjo zahtevo in dobimo

$$(\mathbf{a},\mathbf{x})=\lambda|\mathbf{a}|^2=12\,,$$

torej $\lambda=3$. Sledi še $\mu=-6$. Iskani vektor je

$$\mathbf{x}=3\mathbf{a}-6\mathbf{c}+\frac{1}{8}\mathbf{a}\times\mathbf{c}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Zapis $\mathbf{x}$ z linearno kombinacijo: 4 točke.*
- *λ: 2 točki.*
- *μ: 2 točki.*
- *ν: 2 točki.*

5. (20) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte

$$\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{100}.$$

Rešitev: Z množenjem matrik se prepričamo, da je

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad in \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vsota je torej enaka

$$\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun* $\mathbf{A}^2$*: 2 točki.*
- *Izračun* $\mathbf{A}^3$*: 2 točki.*
- *Ugotovitev* $\mathbf{A}^n = 0$ *za* $n \geq 3$*: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte še

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}.$$

Rešitev: Vemo

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} = ((\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}))^{-1}.$$

Zmnožimo matriki v notranjem oklepaju in dobimo

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Izračunati moramo samo inverz te zadnje matrike. Glede na to, da je matrika trikotna, ni niti potrebno izvajati Gaussovega postopka, ampak inverzno matriko enostavno preberemo. Dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Množenje matrik: 3 točke.*
- *Redukcija na samo eno inverzijo: 3 točke.*
- *Rezultat: 4 točke.*

6. (20) Matrika $\mathbf{A}$ naj bo dana z

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Pokažite, da je $\lambda = 1$ lastna vrednost matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Potrebno je le pokazati, da ima matrika

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rang 3 ali manj. To lahko naredimo z Gaussovim postopkom.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -8/9 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 4/9 & -5/6 & 1/6 \\ 0 & 4/9 & 1/6 & -5/6 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -8/9 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -8/9 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang matrike je 3.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je potrebno pogledati rang: 4 točke.*
- *Uporaba Gaussovega postopka: 4 točke.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Ali obstaja lastni vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, za katerega je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$? Upoštevajte, da po definiciji niso vse komponente lastnega vektorja enake 0.

Rešitev: Vektor $\mathbf{x}$ *bi moral ustrezati enačbi*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

za nek λ*. Če upoštevamo še* $x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$*, lahko zgornjo enačbo prepišemo v*

$$\begin{array}{rcrcrcl} -(\lambda + 1/2)x_1 & - & x_2/6 & & & = & 0 \\ -x_1/6 & - & (\lambda + 1/2)x_2 & & & = & 0 \\ x_1/3 & + & x_2/3 & - & \lambda x_3 & = & 0 \\ (\lambda + 1/3)x_1 & + & (\lambda + 1/3)x_2 & + & \lambda x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Prvi dve enačbi imata netrivialno rešitev samo, če je determinanta pripadajoče matrike

$$\det \begin{pmatrix} -(\lambda + 1/2) & -1/6 \\ -1/6 & -(\lambda + 1/2) \end{pmatrix} = (\lambda + 1/2)^2 - 1/36 = 0\,,$$

torej mora biti $\lambda = -1/2 \pm 1/6$*. Izberimo recimo* $\lambda = -1/3$*. V tem primeru mora biti* $x_1 = -x_2$*. Če izberemo še* $x_3 = 0$*, je izpolnjena tudi tretja enačba. Možni lastni vektor je* $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 0)$*, ki pripada lastni vrednosti* $\lambda = -1/3$*.*

Opomba: Zgornji $\mathbf{x}$ *ni edina možna rešitev. Izberemo lahko tudi* $\lambda = 0$ *in* $\mathbf{x} = (0, 0, 1, -1)$*.*

Ocenjevanje:

- *Ustrezna formulacija naloge: 3 točke.*
- *Ugotovitev, kdaj so enačbe rešljive: 3 točke.*
- *Dejanska rešitev: 4 točke.*