FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

18. september 2000

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** [| | | | | | |]

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Zaporedja in limite:

a. (10) Kot znano privzemite, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{1/2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}} = \sqrt{\pi}\,.$$

Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+3}{2}}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{(2n+3)}{2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{1/2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{(2n+3)}{2}} \\
&= \sqrt{\pi}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{2n+3}{2}} \\
&= \sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{2n}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Faktorizacija $n^{3/2}$: 2 točki.*
- *Dopolnitev števca: 2 točki.*
- *Dopolnitev imenovalca: 2 točki.*
- *Uporaba znane limite: 2 točki.*
- *Dodatna limita in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,x-(2+x)\,\log(1+x)}{(1+x)^2\log(1+x)^3}$$

Namig: Kaj je $\lim_{x\to 0}\log(1+x)/x$?

Rešitev: Limito najprej poenostavimo, tako da števec in imenovalec pomnožimo z x^3. Nato računamo po L'Hospitalu, s tem da preverjamo predpostavke.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2\,x-(2+x)\,\log(1+x)}{(1+x)^2\log(1+x)^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\,x-(2+x)\,\log(1+x)}{(1+x)^2x^3}\cdot\frac{x^3}{\log(1+x)^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\,x-(2+x)\,\log(1+x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2-\log(1+x)-\frac{2+x}{1+x}}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-(1+x)+x}{6x(1+x)^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{6(1+x)^2} \\
&= -\frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Znana limita* $\log(1+x)/x \to 1$*: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Prvi L'Hospital s preverjanjem pogojev: 2 točki.*
- *Drugi L'Hospital s preverjanjem pogojev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo za $x > 0$ definirana z

$$f(x) = (x^4)^{x^2} .$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije $f(x)$.

Rešitev: Najprej poenostavimo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{4x^2} \\ &= e^{4x^2 \log x} \end{aligned}$$

Odvajamo in dobimo

$$f'(x) = f(x) \cdot (8x \log x + 4x) .$$

Če izenačimo z 0 *in upoštevamo* $x > 0$*, sledi da je* $f'(x) = 0$ *samo za* $x = e^{-1/2}$.

Ocenjevanje:

- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Formula za posredno funkcijo: 2 točki.*
- *Odvod: 2 točki.*
- *Enačba za stacionarne točke: 2 točki.*
- *Stacionarna točka: 2 točki.*

b. (10) Ugotovite, ali so stacionarne točke iz a. lokalni minimumi ali lokalni maksimumi in tudi to, ali so točke dejanski minimumi ali maksimumi za vse $x > 0$.

Rešitev: Potrebujemo drugi odvod. Računamo

$$f''(x) = 4\,x^{4\,x^2}\left(3 + 2\,\log(x) + 4\,(x + 2\,x\,\log(x))^2\right) .$$

Če vstavimo $x = e^{-1/2}$*, dobimo* $f''(x) > 0$*, torej je točka lokalni minimum. Iz oblike odvoda* $f'(x)$ *sledi, da je funkcija* $f(x)$ *na intervalu* $(0, e^{-1/2})$ *padajoča, kasneje pa naraščajoča. Točka* $x = e^{-1/2}$ *je tudi globalni minimum.*

Ocenjevanje:

- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Predznak drugega odvoda v* $x = 0$*: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*
- *Ideja, kaj je globalni minimum: 2 točki.*
- *Argument, zakaj je* $x = e^{-1/2}$ *globalni minimum: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) Pokažite, da je za $0 < \alpha < \pi$

$$\int_\alpha^\pi \sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos\alpha - \cos t}}\,\mathrm{d}t = \pi\,.$$

Namig: $\cos\alpha - \cos t = 2\cos^2(\alpha/2) - 2\cos^2(t/2)$.

Rešitev: Uvedimo novo spremenljivko $\cos(\alpha/2)\cdot u = \cos(t/2)$. *Dobimo*

$$2\cos(\alpha/2)\cdot \mathrm{d}u = -\sin(t/2)\cdot \mathrm{d}t\,,$$
$$1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$$

in

$$\begin{aligned}\cos\alpha - \cos t &= \cos\alpha - 2\cos^2(t/2) + 1\\ &= 2\cos^2(\alpha/2) - 2\cos^2(t/2)\,.\end{aligned}$$

Računamo

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\pi \sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos\alpha-\cos t}}\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\pi \frac{\sin(t/2)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2(\alpha/2)-\cos^2(t/2)}}\\ &= -2\int_1^0 \frac{\cos(\alpha/2)\cdot\mathrm{d}u}{\cos(\alpha/2)\sqrt{1-u^2}}\\ &= 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \pi\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Pretvorba diferencialov: 2 točki.*
- *Pretvorba imenovalca: 2 točki.*
- *Pretvorba števca: 2 točki.*
- *Nove meje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_1^e x\log^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

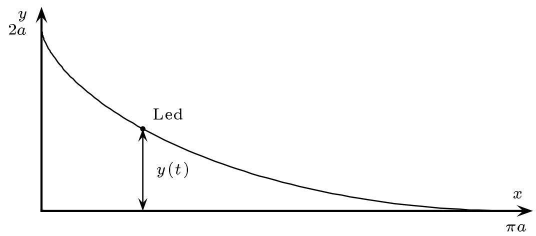
Rešitev: Postavimo $f(x) = x$ *in* $G(x) = \log^2 x$. *Z integracijo per partes integral preide v*

$$\begin{aligned}\int_1^e x\log^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\cdot\log^2 x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\log x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{e^2}{2} - (\frac{x^2}{2}\log x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x)\\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{x^2}{4}\Big|_1^e\\ &= \frac{1}{4}(e^2-1)\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 3 točke.*
- *Drugo integriranje per partes: 3 točke.*
- *Rezultat: 4 točke.*

4. (20) Košček ledu pod vplivom težnosti drsi brez trenja po krivulji cikloidi na sliki 1.



Slika 1 Cikloida, po kateri drsi košček ledu.

V času $t = 0$ košček spustimo iz točke $(a(\pi/2 - 1), a)$. Označimo z $y(t)$ višino (y-koordinato) koščka v času t in definirajmo funkcijo

$$\theta(t) = \arccos(\frac{y-a}{a})\,.$$

Funkcija $\theta(t) \geq \pi/2$ ustreza diferencialni enačbi

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sqrt{\frac{\cos\theta}{\cos\theta - 1}}\,.$$

a. (10) Pokažite, da pri začetnem pogoju $\theta(0) = \pi/2$ velja

$$\sqrt{2}\,\cos(\theta/2) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}} \cdot t\right)\,.$$

Namig:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{-\cos\theta}} = \frac{\sqrt{2}\sin(\theta/2)}{\sqrt{1 - 2\cos^2(\theta/2)}}\,.$$

Rešitev: Prepišimo

$$\frac{\dot{\theta}\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\,.$$

Za rešitev moramo poiskati integral

$$\int \frac{\sqrt{1-\cos\theta} \cdot \mathrm{d}\theta}{\sqrt{-\cos\theta}}\,.$$

Uvedimo novo spremenljivko $t = \cos(\theta/2)$, *torej* $2\mathrm{d}t = -\sin(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-\cos\theta} \cdot \mathrm{d}\theta}{\sqrt{-\cos\theta}} &= \int \frac{\sqrt{2}\,\sin(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - 2\cos^2(\theta/2)}} \\
&= -2\sqrt{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2t^2}} \\
&= 2\arccos(\sqrt{2}t) \\
&= 2\arccos(\sqrt{2}\cos(\theta/2))\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$2\arccos(\sqrt{2}\cos(\theta/2)) = \sqrt{\frac{g}{a}}(t+c)\,.$$

Določimo konstanto c. Vstavimo $t=0$ na obeh straneh in upoštevamo začetni pogoj $\theta(0)=\pi/2$. Dobimo enačbo

$$0 = \sqrt{\frac{g}{a}}c\,,$$

torej $c=0$. Sledi

$$\sqrt{2}\cos(\theta/2) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\cdot t\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v obliko za integriranje: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Integrael: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Končna identiteta: 2 točki.*

b. (10) V kolikšnem času bo košček "pridrsal" z višine $y=a$ na višino $y=0$, ko je $\theta=\pi$?

Namig: Uporabite a., tudi če ne znate dokazati.

Rešitev: Ko je $y=0$ je $\theta=\pi$. Identiteta v a. pove, da je

$$0 = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\cdot t\right)\,,$$

ali

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\cdot t\,.$$

Iz tega izračunamo

$$t = \pi\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kam bi del: 2 točki.*
- *Kam vstaviti $\theta=\pi$: 2 točki.*
- *Opaiti enačbi za t: 2 točki.*
- *Kako iz tega izračunati t: 2 točki*
- *Čas: 2 točki.*

5. (20) Naj bosta dana vektorja

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Rešitev: Po formuli je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mešani produkt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *je enak kvadratu norme* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$*, torej* 18.

Ocenjevanje:

- *Formula za vektorski produkt: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*
- *Formula za mešani produkt: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Poiščite vektor $\mathbf{c}$ dolžine $2\sqrt{2}$, ki je pravokoten na $\mathbf{a}$, oklepa s vektorjem $\mathbf{b}$ kot $\pi/6$ in zadošča pogoju $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$.

Rešitev: Iz pogojev sledi, da je

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{b} + \mu (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

ker vektorja $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *napenjata vse vektorje pravokotne na* $\mathbf{a}$*. Ker je kot med* $\mathbf{c}$ *in* $\mathbf{b}$ *enak* $\pi/6$*, mora biti skalarni produkt*

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{6}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6 \\ &= (\lambda \mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ &= 6\lambda. \end{aligned}$$

Torej je $\lambda = 1$*. Po drugi strani mora biti*

$$|\mathbf{c}|^2 = \lambda^2 |\mathbf{b}|^2 + \mu^2 |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2,$$

torej

$$8 = 6 + 18\mu^2$$

ali $\mu = \pm 1/3$*. Ker je* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mu \mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0$*, je torej* $\mu |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0$*, torej* $\mu > 0$*. Vektor* $\mathbf{c}$ *je enak* $\mathbf{c} = (0, 2, 2)^T$.

Ocenjevanje:

- *Linearna kombinacija: 2 točki.*
- *Enačba iz kota: 2 točki.*
- λ*: 2 točki.*
- *Enačba za* μ *iz norme: 2 točki.*
- μ*: 2 točki.*

6. (20) Matrika $\mathbf{X}(2 \times 2)$ ustreza enačbi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite matriko $\mathbf{X}$.

Namig: Zapišite

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

in prepišite zgornjo enačbo s temi oznakami.

Rešitev: Zapišimo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Izenačimo istoležne člene in dobimo sistema enačb

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Izvedemo Gaussov postopek in dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Razberemo

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Množenje matrik: 2 točki.*
- *Izenačevanje istoležnih členov: 2 točki.*
- *Prvi Gauss: 2 točki.*
- *Drugi Guass: 2 točki.*
- $\mathbf{X}$*: 2 točki.*

b. (10) Je z zgornjo enačbo matrika $\mathbf{X}$ enolično določena?

Rešitev: Matrika sistem ima poln rang, torej je sistem enolično rešljiv.

Ocenjevanje:

- *Po presoji.*