FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

4. september 2000

Ime in priimek: ________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite zaporedij in funkcij:

a. (10) Definirajte zaporedje $\{a_n\}$ za $n \geq 1$ z

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \,.$$

Kot znano privzemite, da velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma \,,$$

kjer je $\gamma = 0.577216...$ Eulerjeva konstanta. Naj bo b_n zaporedje dano z

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \,.$$

Izračunajte $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Namig: Kaj je $\lim_{n\to\infty} (a_{2n} - a_n)$*?*

Rešitev: Ker zaporedje $\{a_n\}$ *konvergira, je seveda*

$$\lim_{n\to\infty} (a_{2n} - a_n) = 0 \,.$$

Izračunamo

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \log(2n) + \log n \,.$$

Sledi

$$a_{2n} - a_n = b_n - \log 2 \,,$$

torej

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - \log 2) = 0 \,.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2 \,.$$

Ocenjevanje:

- *Limita v namigu: 2 točki.*
- *Opažanje, kaj je* $a_{2n} - a_n$*: 2 točki.*
- *Poenostavitev logaritmov: 2 točki.*
- *Logaritem na desno stran: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2 + e^x\,(-2 + x) + x)}{(e^x - 1)^3}$$

Rešitev: Vemo, da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \,.$$

Izraz, katerega limito računamo, pomnožimo in delimo z x^3 *in upoštevamo, da je*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(e^x - 1)^3} = 1 \,.$$

Računamo po L'Hospitalu in vsakič preverimo predpostavke

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(2+e^x\,(-2+x)+x)}{(e^x-1)^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(e^x-1)^3} \cdot \frac{(2+e^x\,(-2+x)+x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(2+e^x\,(-2+x)+x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x(-2+x)+e^x+1}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x x+e^x-e^x}{6x} \\
&= \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Znana limita $(e^x-1)/x \to 1$: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Prvi L'Hospital s preverjanjem pogojev: 2 točki.*
- *Drugi L'Hospital s preverjanjem pogojev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Definirajte za vsak $n \geq 0$ na intervalu $(-1, 1)$ funkcije

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,.$$

a. (10) Pokažite, da za vsak $n \geq 0$ velja

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0\,.$$

Rešitev: Računamo

$$T_n'(x) = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

in

$$\begin{aligned} T_n''(x) &= \frac{-n^2 \cos(n \arccos x) + n \sin(n \arccos x) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - x^2} \\ &= \frac{-n^2 \cos(n \arccos x)\sqrt{1 - x^2} + x \sin(n \arccos x)}{(1 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Vstavljanje v zgornji izraz potrdi enakost, ki jo je potrebno pokazati.

Ocenjevanje:

- *Formula za odvod sestavljene funkcije: 2 točki.*
- *Formula za odvod kvocienta: 2 točki.*
- *Prvi odvod: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da so za vsak $n > 1$ točke $x_k = \cos(k\pi/n)$ za $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ stacionarne za $T_n(x)$ in ugotovite, ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

Rešitev: Točke x_k so stacionarne, če velja $T_n'(x_k) = 0$. Preverimo

$$\begin{aligned} T_n'(x_k) &= -\frac{\sin(n \arccos(x_k))}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= -\frac{\sin(n \arccos(\cos(k\pi/n)))}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= -\frac{\sin(n \cdot \frac{k\pi}{n}))}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{\sin(k\pi)}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Izračunamo še

$$T_n(x_k) = (-1)^k\,.$$

Iz a. sledi, da je

$$(1 - x_k^2)T_n''(x_k) = -n^2 T_n(x_k) = -n^2(-1)^k\,.$$

Sledi: Če je k lih, je $T_n''(x_k) > 0$ in je x_k lokalni minimum, če pa je k sod, je $T_n''(x_k) < 0$ in je x_k lokalni maksimum.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje stacionarnosti: 2 točki.*
- *Ideja gledati drugi odvod: 2 točki.*
- *Izračun vrednosti funkcije: 2 točki.*
- *Uporaba a.: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}\,.$$

Rešitev: Najprej razcepimo izraz na parcialne ulomke. Iz nastavka

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

dobimo $A=1$, $C=0$ *in* $B=-1$. *Sledi*

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= \log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\\ &= \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).\end{aligned}$$

Dobimo

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} = \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\Big|_1^\infty = \frac{1}{2}\log 2\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za parcialne ulomke: 2 točki.*
- *Konstante: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Pretvorba na* $\log(x/\sqrt{1+x^2})$*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Označimo z v_n prostornino n-dimenzionalne krogle s polmerom $r=1$. Velja

$$v_{n+1} = v_n \cdot \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n/2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Označite

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n/2}\,\mathrm{d}x$$

in pokažite z integracijo *per partes*, da velja

$$I_n = n(I_{n-2} - I_n)\,.$$

Izračunajte prostornino 5-dimenzionalne krogle v_5 ($v_3 = 4\pi/3$).

Namigi: Uporabite $x^2 = 1-(1-x^2)$, $I_1 = \pi/2$ *in* $I_2 = 4/3$.

Rešitev: Najprej pokažimo, da velja rekurzivna formula za I_n. Izberimo $f(x) = 1$ in $G(x) = (1 - x^2)^{n/2}$. Računamo

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{n/2}\, \mathrm{d}x \\
&= x \cdot (1 - x^2)^{n/2}\Big|_{-1}^{1} + n \int_{-1}^{1} x^2 \cdot (1 - x^2)^{\frac{n-2}{2}}\, \mathrm{d}x \\
&= n \left[\int_{-1}^{1} [1 - (1 - x^2)] \cdot (1 - x^2)^{\frac{n-2}{2}}\, \mathrm{d}x \right] \\
&= n \left[\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{n-2}{2}}\, \mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{n/2} \right] \\
&= n(I_{n-2} - I_n)\,.
\end{aligned}
$$

Iz rekurzivne formule dobimo

$$I_n = \frac{n}{n+1} \cdot I_{n-2}\,.$$

Sledi

$$I_3 = \frac{3}{4} \cdot I_1\,.$$

Opazimo, da je $I_1 = \pi/2$ (polovica kroga). Potrebujemo še

$$I_4 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, \mathrm{d}x = \frac{16}{15}\,.$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
v_5 &= v_4 \cdot I_4 \\
&= v_3 \cdot I_3 \cdot I_4 \\
&= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{16}{15} \\
&= \frac{8\pi^2}{15}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Izbira $f(x)$ in $G(x)$: 2 točki.*
- *Pravilno upoštevanje mej: 2 točki.*
- *Pretvorba na rekurzivno formulo: 2 točki.,*
- *Izračun I_3 in I_4: 2 točki.*
- *v_5: 2 točki.*

4. (20) Po Newtonovem zakonu ohlajanja opisuje temperaturo telesa v tekočini s temperaturo T_m diferencialna enačba

$$T'(t) = -k(T(t) - T_m(t))\,,$$

kjer je $T(t)$ temperatura telesa v času t, $T_m(t)$ temperatura tekočine v času t, k pa neka konstanta.

a. (10) Privzemite najprej, da je T_m konstantna in rešite diferencialno enačbo, če je začetna temperatura telesa enaka $T_0 > T_m$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{T'}{T - T_m} = -k\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\log(T - T_m) = -kt + \log c\,,$$

kjer je c neka konstanta. Konstanto moramo določiti iz začetnega pogoja. Najprej še prepišimo rešitev v obliko

$$T = T_m + ce^{-kt}$$

in vstavimo $t = 0$. Dobimo

$$T_0 = T_m + c\,,$$

torej $c = T_0 - T_m$. Rešitev bo oblike

$$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis v obliko za integriranje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Enačba za konstanto: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Privzemite, da se tekočina segreva in je njena temperatura v trenutku t enaka $T_m(t) = T_0(1 - e^{-\kappa t})$ za neko konstanto $\kappa < k$. Temperaturo telesa še vedno opisuje enačba

$$T' = -k(T - T_m)\,.$$

Rešite diferencialno enačbo, če je začetna temperatura telesa enaka T_0.

Rešitev: Enačbo prepišimo v

$$T' + kT = kT_0(1 - e^{-\kappa t})\,.$$

Kot vidimo, gre za nehomogeno linearno diferencialno enačbo prevega reda. Najprej rešimo homogeno enačbo. Dobimo

$$T_h(t) = e^{-kt}\,.$$

Potrebujemo še partikularno rešitev. Na desni strani je kombinacija eksponentne funkcije in konstante. Poskusimo z nastavkom

$$T_p(t) = c_1 + c_2 e^{-\kappa t}\,.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$-c_2\kappa e^{-\kappa t} + k(c_1 + c_2 e^{-\kappa t}) = kT_0(1 - e^{-\kappa t})\,.$$

Sledi, da mora biti

$$c_1 = T_0 \qquad \mathit{in} \qquad c_2(-\kappa + k) = -kT_0\,,$$

torej $c_1 = T_0$ *in* $c_2 = -kT_0/(k-\kappa)$. *Splošna rešitev diferencialne enačbe bo*

$$T(t) = T_0 - \frac{kT_0}{k-\kappa}\,e^{-\kappa t} + ce^{-kt}\,,$$

kjer moramo zdaj določiti c *tako, da bo* $T(0) = T_0$. *Vstavimo* $t = 0$ *in dobimo*

$$T_0 = T_0 - \frac{kT_0}{k-\kappa} + c$$

ali

$$c = \frac{kT_0}{k-\kappa}\,.$$

Rešitev enačbe bo

$$T = T_0 + \frac{kT_0}{k-\kappa}\left(e^{-kt} - e^{-\kappa t}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je enačba nehomogena, linearna s konstantnimi koeficienti: 2 točki.*
- *Rešutev homogene enačbe: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Konstanta in rešitev: 2 točki.*

5. (20) Naj bodo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ vektorji v prostoru.

a. (10) Pokažite, da velja

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{a},\mathbf{x})(\mathbf{b},\mathbf{y}) - (\mathbf{a},\mathbf{y})(\mathbf{b},\mathbf{x})\,.$$

Rešitev: Najpreprostejša možnost je ta, da opazimo

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{x}\times\mathbf{y},\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.$$

Uporabimo Lagrangeovo formulo in dobimo želeni rezultat.

Ocenjevanje:

- *Definicija mešanega produkta: 2 točki.*
- *Zamenjava argumentov spremeni predznak: 2 točki.*
- *Prevedba na skalarni produkt dveh vektorskih produktov: 2 točki.*
- *Lagrangeaova identiteta: 4 točke.*

b. (10) Naj bodo $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T$ in $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$ običajna baza v prostoru. Za nek vektor $\mathbf{x}$ naj velja

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) &= 1\\ (\mathbf{x},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3) &= -1/2\\ (\mathbf{x},\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) &= -1\end{aligned}$$

Poiščite vektor $\mathbf{x}$.

Rešitev: Zapišimo $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2 + \nu\mathbf{e}_3$, *kar lahko, ker so* $\mathbf{e}_i$ *baza. Določiti moramo konstante v linearni kombinaciji. Upoštevali bomo, da je mešani produkt linearen v vsakem faktorju in to, da je mešani produkt v primeru, ko sta dva vektorja enaka enak* 0. *Iz enačb dobimo*

$$\begin{aligned}\nu(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) &= 1\\ \mu(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3) &= -1/2\\ \lambda(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) &= -1\end{aligned}$$

Razberemo $\lambda = -1$, $\mu = 1/2$ *in* $\nu = 1$, *torej* $\mathbf{x} = (-1, 1/2, 1)^T$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek z linearno kombinacijo: 2 točki.*
- *Vstavljanje v prvo enačbo in predznak mešanega produkta: 2 točki.*
- *Vstavljanje v drugo enačbo in predznak mešanega produkta: 2 točki.*
- *Vstavljanje v tretjo enačbo in predznak mešanega produkta: 2 točki.*
- *Vektor* $\mathbf{x}$: *2 točki.*

6. (20) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a. (10) Privzemite $a \neq 0$. Izračunajte $\mathbf{A}^{-1}$.

Rešitev: Označimo stolpce inverzne matrike z $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ *in* $\mathbf{x}_3$. *Vektor* $\mathbf{x}_1$ *mora zadoščati enačbi*

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dobimo, da je

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podobno računamo za ostala dva stolpca. Rezultat:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za iskanje inverzne matrike: 2 točki.*
- *Prvi stolpec: 2 točki.*
- *Drugi stolpec: 2 točki.*
- *Tretji stolpec: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da ima matrika $\mathbf{A}$ en sam lastni vektor $\mathbf{x}$, da pa obstajata vektorja $\mathbf{y}$ in $\mathbf{z}$, da je

$$(\mathbf{A} - a\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{x} \qquad \text{in} \qquad (\mathbf{A} - a\mathbf{I})\mathbf{z} = \mathbf{y}\,.$$

Rešitev: Karakteristični polinom matrike $\mathbf{A}$ *je* $P(\lambda) = (a - \lambda)^3$ *s trojno ničlo* $\lambda = a$. *Lastni vekor(ji) mora(jo) zadoščati enačbi*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ker je rang$(\mathbf{A} - a\mathbf{I}) = 2$, *bo lastni vektor en sam (vsaj do množenja s konstanto natančno), recimo* $\mathbf{x} = (1, 0, 0)^T$.

Hitro najdemo tudi $\mathbf{y} = (0, 1, 0)^T$ *in* $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Lastna vrednost in lastni vektor: 2 točki.*
- *Rang* $\mathbf{A} - \mathbf{I}$*: 2 točki.*
- *Vektor* $\mathbf{y}$*: 2 točki.*
- *Vektor* $\mathbf{z}$*: 2 točki.*