FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

23. september 2002

Ime in priimek: ________________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite.

a. (10) Zaporedje $x_0, x_1, \ldots$ naj bo dano rekurzivno z

$$x_0 = 1 \qquad \text{in} \qquad x_{n+1} = 4\sqrt[3]{x_n}\,.$$

Dokažite, da je $x_n \leq 8$ za vse $n \geq 1$ in je zaporedje naraščajoče. Sklepajte, da ima limito in jo izračunajte.

Rešitev: Velja $x_0 \leq 8$. Če je $x_n \leq 8$, je

$$x_{n+1} \leq 4\sqrt[3]{8} = 8\,.$$

Po indukciji sklepamo, da omejitev velja za vse n. Za dokaz monotonosti računamo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 4x_n^{-2/3} \geq 4 \cdot 8^{-2/3} = 1\,.$$

Pri tem smo upoštevali omejenost x_n. Zaporedje je naraščajoče in navzgor omejeno, zato ima limito. Označimo limito z x. Ustrezati mora enačbi

$$x = 4\sqrt[3]{x}\,.$$

Edina pozitvna rešitev je $x = 8$.

Ocenjevanje:

- *Ideja za omejenost navzgor: 2 točki.*
- *Indukcijaki korak: 2 točki.*
- *Monotonost: 2 točki.*
- *Sklep o obstoju limite: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{-6\,x + \log(1+x)\ (6 + (3+x)\ \log(1+x))}{x^4}\,.$$

Rešitev: Računamo z uporabo L'Hospitalovega pravila, s tem da na vsakem koraku preverimo predpostavke.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{-6\,x + \log(1+x)\ (6 + (3+x)\ \log(1+x))}{x^4} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{-6\,x + 2\ (3+x)\ \log(1+x) + (1+x)\ \log(1+x)^2}{4x^3(1+x)} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{-6\,x + 2\ (3+x)\ \log(1+x) + (1+x)\ \log(1+x)^2}{4x^3} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{-4x + (1+x)\log(1+x)(4 + \log(1+x))}{12x^2} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{2\ \log(1+x) + \log(1+x)\ (4 + \log(1+x))}{24x} \\
&\quad = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} \\
&\quad = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z L'Hospitalom: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje in preverjanje: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje in preverjanje: 2 točki.*
- *Tretje odvajanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Z vrha hriba višine h pod kotom α izstrelimo topovsko kroglo z začetno hitrostjo v. Domet d topa je odvisen od kota po formuli

$$d = \frac{v\cos\alpha}{g}\left(v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}\right),$$

kjer je g zemeljski pospešek. Želimo najti kot, pri katerem bo domet največji.

a. (10) Označite

$$\beta = \frac{2hv}{\sqrt{v^2+2hg}}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{2hg}{v^2+2hg}} \qquad \text{in} \qquad \mathrm{tg}\alpha = x\,.$$

Pokažite, da je

$$d = \frac{\beta}{\sqrt{x^2+\gamma^2} - \sqrt{1-\gamma^2}\,x}\,.$$

Namig: Množite števec in imenovalec z $-v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}$.

Rešitev: Izraz za d množimo in delimo z $-v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
&\frac{v\cos\alpha}{g}\left(v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}\right)\\
&= \frac{v\cos\alpha}{g}\,\frac{\left(v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}\right)\left(-v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}\right)}{\left(-v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}\right)}\\
&= \frac{v\cos\alpha}{g}\cdot\frac{v^2\sin^2\alpha + 2hg - v^2\sin^2\alpha}{-v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2hg}}\\
&= \frac{2hv}{-v\mathrm{tg}\alpha + \sqrt{v^2\mathrm{tg}^2\alpha + 2hg(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}}\\
&= \frac{2hv}{\sqrt{(v^2+2hg)\mathrm{tg}^2\alpha + 2hg} - v\mathrm{tg}\alpha}\\
&= \frac{2hv}{\sqrt{v^2+2hg}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 2hg/(v^2+2hg)} - v\mathrm{tg}\alpha/\sqrt{v^2+2hg}}\\
&= \frac{\beta}{\sqrt{x^2+\gamma^2} - \sqrt{1-\gamma^2}x}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Množenje števca in imenovalca: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Deljenje s* $\cos\alpha$*: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Vstavljanje* x *in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Najdite kot $\alpha \in [0, \pi/2)$, pri katerem bo domet največji. Prepričajte se, da ste res našli maksimum.

Namig: Uporabite a., tudi če ne znate izpeljati formule.

Rešitev: Gre za iskanje maksimuma funkcije

$$x \mapsto \frac{\beta}{\sqrt{x^2+\gamma^2} - \sqrt{1-\gamma^2}x}$$

za $x \in [0, \infty)$. *Nekoliko laže je iskati minimum imenovalca, torej funkcije*

$$f(x) = \sqrt{x^2+\gamma^2} - \sqrt{1-\gamma^2}\, x\,.$$

Odvajamo in izenačimo z 0. *Dobimo enačbo*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+\gamma^2}} - \sqrt{1-\gamma^2} = 0$$

z rešitvijo $x = \sqrt{1-\gamma^2}$. *Iskani kot je* $\alpha = \mathrm{arctg}(\sqrt{1-\gamma^2})$. *Odvajajmo še enkrat in dobimo*

$$f''(x) = \frac{\gamma^2}{(x^2+\gamma^2)^{3/2}} > 0\,.$$

Funkcija je konveksna, tako da je najdena stacionarna točka absolutni minimum. Maksimalni domet je

$$d = \frac{\beta}{\gamma^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da uporabimo* x *za spremenljivko: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Stacionarna točka: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Domet in sklep o absolutnem minumumu: 2 točki.*

3. (20) Integriranje.

a. (10) Z integracijo per partes izračunajte integral

$$\int_0^\infty (2-x^2)\, e^{-x} \log x \,\mathrm{d}x\,.$$

Namig: $F(x) = \log x$.

Rešitev: Izberimo si $F(x) = \log x$ *in* $g(x) = (2-x^2)e^{-x}$. *Intergriramo per partes*

$$\begin{aligned}
\int (2-x^2)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= -2e^{-x} - \int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -2e^{-x} - \left(-x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -2e^{-x} + x^2e^{-x} - 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -2e^{-x} + x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} \\
&= e^{-x}(2x+x^2)\,.
\end{aligned}$$

Vrnimo se k prvotnemu integralu. Računamo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (2-x^2)e^{-x}\log x\,\mathrm{d}x &= e^{-x}(2x+x^2)\log x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}(2+x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty e^{-x}(2+x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left(2 + \int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -2 - \left(-xe^{-x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -2-1 \\
&= -3\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izbira g: 2 točki.*
- *Prvo integriranje za G: 2 točki.*
- *Drugo integriranje za G: 2 točki.*
- *Integriranje per partes prvotnega integrala: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^2}\,.$$

Rešitev: Gre za racionalno funkcijo, ki jo najprej razstavimo na parcialne ulomke z nastavkom

$$\frac{x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{(2-x)^2} + \frac{C}{2+x} + \frac{D}{(2+x)^2}\,.$$

Zmnožimo in dobimo

$$x^2 = A(2-x)(2+x)^2 + B(2+x)^2 + C(2+x)(2-x)^2 + D(2-x)^2 \,.$$

Koeficienti morajo ustrezati enačbam

$$\begin{aligned} 0 &= -A + C \\ 1 &= -2A + B - 2C + D \\ 0 &= 4A + 4B - 4C - 4D \\ 0 &= 8A + 4B + 8C + 4D \end{aligned}$$

Iz prve in tretje enačbe sledi $B = D$. *Iz druge in četrte dobimo, da je* $B = D = 1/4$. *Sledi* $A = C = -1/8$. *Torej je*

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^2} = \frac{1}{8}\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{4-x^2}\,.$$

Vstavimo meje in dobimo

$$\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^2} = -\frac{\log 3}{8} + \frac{1}{6}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za parcialne ulomke: 2 točki.*
- *Enačbe za koeficiente: 2 točki.*
- *Koeficienti: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Eden od modelov rasti prebivalstva je diferencialna enačba

$$y' = y(b - y)$$

za $b > 0$. Pri tem je $y(t)$ velikost populacije v trenutku t.

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(b-y)} = \mathrm{d}t\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(b-y)} = \frac{1}{b}\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{b}\log(\frac{y}{b-y}) = t + c\,.$$

Iz tega izračunamo

$$y(t) = \frac{Cbe^{bt}}{1+Ce^{bt}}\,,$$

kjer je $C = e^{bc}$.

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, gre za enačbo z ločljivima spremenljivkama: 2 točki.*
- *Prepis: 2 točki.*
- *Razcep na parcialne ulomke: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Konstanta in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $y(0) = b/4$. V kolikšnem času se bo populacija podvojila?

Rešitev: Najprej določimo konstanto C *tako, da bo zadoščeno začetnemu pogoju. Veljati mora*

$$y(0) = b/4 = \frac{Cb}{1+C}\,.$$

Sledi $C = 1/3$. *Iz zveze*

$$\frac{1}{b}\log(\frac{y}{b-y}) = t + \frac{\log C}{b}$$

razberemo, da mora v trenutku t*, ko se populacija podvoji, veljati*

$$0 = t + \frac{\log C}{b}$$

torej $t = \frac{\log 3}{b}$.

Ocenjevanje:

- *Kam bi del začetni pogoj?: 2 točki.*
- *C: 2 točki.*
- *Kam bi del b/2?: 2 točki.*
- *Enačba za t: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bodo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ poljubni med seboj linearno neodvisni vektorji.

a. (10) Pokažite, da so vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ med seboj linearno odvisni.

Rešitev: Vemo, da je

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\, \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{a})\, \mathbf{b}\,,$$

kar je že dovolj.

Ocenjevanje:

- *Kaj je potrebno? 2 točki.*
- *Izražanje trojnega vektorskega produkta: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Preureditev: 2 točki.Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Predpostavite, da sta vektorja $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ ortogonalna. Izračunajte ortogonalno projekcijo vektorja $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ na vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Rešitev: Po formuli za ortogonalno projekcijo je

$$pr_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c})}{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})}\,.$$

Skalarni produkt lahko pretvorimo po Lagrangevi formuli. Dobimo

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b})(\mathbf{c}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{c})\,.$$

Zaradi ortogonalnosti je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ *in* $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$*, torej je projekcija enaka* 0.

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Lagrange: 2 točki.*
- *Preureditev: 2 točki.*
- *Uporaba ortogonalnosti: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

6. (20) Matrika $\mathbf{A}$ naj bo dana z

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-a & -a & -a & -a \\ -a & 1-a & -a & -a \\ -a & -a & 1-a & -a \\ -a & -a & -a & 1-a \end{pmatrix}.$$

a. (10) Naj bo $a = 1/4$ in $\mathbf{b} = (1, 1, 1, b)$. Za katere b je rešljiva enačba $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Za najdene b poiščite vse rešitve.

Rešitev: Matrika $\mathbf{A}$ *je enaka*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Izvedemo Gaussov postopek na razširjeni matriki. Zaradi lažjega računanja nekoliko spremenimo vrstni red vrstic.

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & b \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b-1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+3 \end{pmatrix}$$

Če želimo, da rešitev obstaja, mora biti rang razširjene matrike enak 3*, torej* $b + 3 = 0$*. Enačba je rešljiva, če je* $b = -3$*. Poiščemo partikularno rešitev tako, da si, recimo, izberemo* $x_4 = 0$*. Sledi* $x_3 = 4$*,* $x_2 = 4$ *in* $x_1 = 4$*. Rešimo še pripadajočo homogeno enačbo. Izberimo, recimo,* $x_4 = 1$*. Sledi* $x_3 = x_2 = 1$ *in* $x_1 = 1$*. Vse rešitve so oblike*

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

za poljubno konstanto λ*.*

Ocenjevanje:

- *Gaussov postopek: 2 točki.*
- *Rangi: 2 točki.*
- *Enačba za b in b: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Za katere a ima enačba $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ netrivialno rešitev?

Namig: Odštejte najprej prvo vrstico vsem ostalim. Preuredite vrstni red vrstic in izvedite Gaussov postopek.

Rešitev: Poiskati moramo take a, da bo rang matrike $\mathbf{A}$ enak 3 ali manj. Upoštevamo, da prištevanje veačkratnikov poljubne vrstice poljubni drugi vrstici ne spremeni ranga. Odštejmo najprej prvo vrstico vsem ostalim. Dobimo

$$\begin{pmatrix} 1-a & -a & -a & -a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rang se ne spremeni, če zamenjamo vrstice. Odštejmo zadnjo vrstico od druge in tretje in nekoliko zamenjajmo vrstni red vrstic.

$$\begin{pmatrix} 1-a & -a & -a & -a \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Če pogledamo zadnje tri vrstice, ugotovimo, da bo rang $\mathbf{A}$ vsaj 3. Prva vrstica mora biti linearna kombinacija ostalih treh, če želimo, da bi bil rang enak 3. Sledi

$$-(1-a)+a+a=-a\,,$$

ker se morajo zadnje komponente vrstic sešteti v $-a$. Sledi $a=1/4$. Z Gaussovim postopkom lahko preverimo, da je rang res 3.

Ocenjevanje:

- *Ideja z rangom: 2 točki.*
- *Operacije, ki ne spremenijo ranga: 2 točki.*
- *Prvi korak: 2 točki.*
- *Drugi korak: 2 točki.*
- *Končni a in preverjanje: 2 točki.*