FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

9. september 2002

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite:

a. (10) Naj bo $a, c > 0$

$$a_n = \frac{c(c+1)(c+2)\cdots(c+n)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\,.$$

Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 &= \frac{a+n+1}{c+n+1} - 1 \\ &= \frac{a-c}{c+n+1}\,.\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{c-a}{c+n+1} \\ &= a - c\,.\end{aligned}$$

- *Kvocient: 2 točki.*
- *Odštevanje 1: 2 točki.*
- *Pretvorba: 2 točki.*
- *Množenje z n: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)^x.$$

Rešitev: Prepišemo

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{1-x}{x^2}\right)^x.$$

Računamo limito logaritma.

$$\lim_{x\downarrow 0} x(\log(1-x) - 2\log x)$$

$$= 0\,.$$

Upoštevali smo, da je

$$\lim_{x\downarrow 0} x\log x = 0\,.$$

Prvotna limita je tako enaka 1.

Ocenjevanje:

- *Skupni imenovalec: 2 točki.*
- *Logaritmiranje: 2 točki.*
- *Prvi člen: 2 točki.*
- *Drugi člen: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. Funkcija f naj bo poljubno mnogokrat odvedljiva na $\mathbb{R}$. Naj bo $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ in naj velja zveza

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0\,.$$

a. (10) Označite $c_n = f^{(n)}(0)/n!$. S pomočjo Leibnizovega pravila pokažite

$$n^2 c_n + c_{n-2} = 0\,.$$

Rešitev: Enakost v besedilu naloge odvajamo n-krat po x. Dobimo

$$\begin{aligned} & x^2 f^{(n+2)}(x) + 2nx f^{(n+1)}(x) + n(n-1) f^{(n)}(x) + x f^{(n+1)}(x) + \\ + \quad & n f^{(n)}(x) + x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Vstavimo $x = 0$ in uporabimo oznako $c_n = f^{(n)}(0)/n!$. Dobimo

$$n! \cdot n(n-1) c_n + n! \cdot n c_n + (n-2)! \cdot n(n-1) c_{n-2} = 0\,.$$

Delimo z $n!$ in dobimo

$$n^2 c_n + c_{n-2} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z odvajanjem enakosti: 2 točki.*
- *Odvajanje prvega člena: 2 točki.*
- *Odvajanje drugega člena: 2 točki.*
- *Odvajanje tretjega člena: 2 točki.*
- *Urejanje in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Zapišite Taylorjev polinom $2n$-te stopnje za funkcijo $f(x)$ okrog točke $x_0 = 0$.

Namig: Obravnavajte c_n posebej za lihe in za sode n.

Rešitev: Iz besedila naloge sledi $c_0 = 1$ in $c_1 = 0$. Ker je $c_1 = 0$, so vsi lihi c_n enaki 0. Označimo $a_n = c_{2n}$. Računamo

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-1}}{(2n)^2} \\ &= \frac{a_{n-2}}{(2n)^2(2(n-1))^2} \\ &= \cdots\cdots\cdots \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Začetna člena: 2 točki.*
- *Lihi členi: 2 točki.*
- *Uporaba rekurzije: 2 točki.*
- *Iteracija rekurzije: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Integriranje.

a. (10) Z integriranjem per partes izračunajte

$$\int_0^\infty xe^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty xe^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= -xe^{-x}\sin x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (\sin x + x\cos x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty xe^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x - xe^{-x}\cos x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}(\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x - I\,.
\end{aligned}$$

Računamo posebej vsakega od zgornjih integralov.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x &= -e^{-x}\sin x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= -e^{-x}\cos x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

Podobno izračunamo integral s $\cos x$. *Sledi* $2I = 1$ *ali* $I = 1/2$.

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Drugo integiranje per partes: 2 točki.*
- *Prvi vmesni integral: 2 točki.*
- *Drugi vmesni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Delimo števec in imenovalec s $\cos^2 x$ *in postavimo* $\mathrm{tg}(x) = u$, *torej* $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(1+u^2)$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1+2u^2)(1+u^2)} \\
&= 2\int_0^\infty \left(-\frac{1}{2(1+u^2)} + \frac{1}{1+2u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= -\mathrm{arctg} u|_0^\infty + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}u)|_0^\infty \\
&= -\pi/2 + \pi/\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Deljenje: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- du*: 2 točki.*
- *Parcialni ulomki: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Telo vržemo navpično navzgor s površja zemlje. Označimo hitrost telesa v trenutku t z $v(t)$. Ob upoštevanju zračnega upora, bo hitrost opisovala diferencialna enačba

$$m\dot{v} = -mg - kv\,,$$

kjer je m masa telesa, g zemeljski pospešek in k konstanta.

a. (10) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Enačba je nehomogena linearna prvega reda. Homogena rešitev je $v(t) = e^{-kt/m}$. Za nehomogeno enačbo poskusimo s konstanto. Hitro se prepričamo, da je konstanta $-mg/k$ partikularna rešitev enačbe. Splošna rešitev bo torej

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + ce^{-kt/m}$$

za neko konstanto c.

Ocenjevanje:

- *Homogeni del: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Linearna kombinacija: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) V katerem trenutku bo telo doseglo najvišjo lego? Začetna hitrost je enaka v_0.

Rešitev: Ustreči moramo začetnemu pogoju, torej

$$v_0 = v(0) = -\frac{mg}{k} + c\,.$$

Sledi

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})\,.$$

Označimo trenutek, ko bo telo najviše, s t_0. Hitrost v tem trenutku bo enaka 0, torej mora veljati

$$0 = v_0 e_0^{-kt_0/m} - \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt_0/m})\,.$$

Sledi

$$e^{-kt_0/m}(v_0 + \frac{mg}{k}) = \frac{mg}{k}$$

ali

$$t_0 = \frac{m}{k}\log\left(\frac{v_0 k + mg}{mg}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Ideja, da je hitrost enaka 0: 2 točki.*
- *Enačba za t_0: 2 točki.*
- *Preureditev: 2 točki.*
- *t_0: 2 točki.*

5. Poljubna dva od enotskih vektorjev $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ oklepata kot $\pi/3$ in velja $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$.

a. (10) Utemeljite, da velja

$$\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

in izračunajte koeficienta λ in μ.

Namig: Upoštevajte $(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 1$.

Rešitev: Vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *so baza prostora, zato lahko poljuben vektor napišemo kot linearno kombinacijo teh vektorjev. Zaradi simetrije sta koeficienta pri* $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{b}$ *enaka. Za izračun koeficientov množimo najprej z* $\mathbf{a}$. *Dobimo*

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \lambda((\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}))\,,$$

torej

$$1/2 = \lambda(1 + 1/2)$$

ali $\lambda = 1/3$. *Vektor* $\mathbf{c}$ *je enotski, zato mora veljati*

$$\begin{aligned} 1 &= (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ &= \lambda^2(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mu^2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= 3\lambda^2 + \mu^2(1 - 1/4) \qquad \textit{Lagrangeva identiteta} \\ &= 3\lambda^2 + 3\mu^2/4\,. \end{aligned}$$

Sledi $\mu^2 = 8/9$. *Ker je* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$, *mora biti* $\mu = 2\sqrt{2}/3$.

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev razvoja po bazi: 2 točki.*
- *Simetrija: 2 točki.*
- *Množenje z* $\mathbf{a}$*: 2 točki.*
- *Množenje z* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$*: 2 točki.*
- *Koeficienti: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Rešitev: Uporabimo linearnost mešnega produkta. Računamo

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, (\mathbf{a} + \mathbf{b})/3 + 2\sqrt{2}/3(\mathbf{a} \times \mathbf{b})) \\ &= 2\sqrt{2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})/3 \\ &= 2\sqrt{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= 2\sqrt{2}(1 - 1/4) \\ &= 3\sqrt{2}/2\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Zapis* $\mathbf{c}$ *z linearno kombinacijo: 2 točki.*
- *Linearnost mešanega produkta: 2 točki.*
- *Mešani produkt linearno odvisnih vektorjev: 2 točki.*
- *Lagrangeova identiteta: 2 točki.*
- *Koncni rezultat: 2 točki.*

6. (20) Naj bo

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in definirajte

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{E} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{I} + \beta \mathbf{E}\,.$$

a. (10) Naj bo $\alpha \neq -1/3$. Poiščite tak β, da bosta matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ inverzni.

Rešitev: Z množenjem ugotovimo, da je

$$\mathbf{E}^2 = 3\mathbf{E}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (\mathbf{I} + \alpha\mathbf{E})(\mathbf{I} + \beta\mathbf{E}) \\ &= \mathbf{I} + \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{E} + \alpha\beta\mathbf{E}^2 \\ &= \mathbf{I} + (\alpha + \beta + 3\alpha\beta)\mathbf{E}\,. \end{aligned}$$

Če želimo, da je $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, mora biti $\alpha + \beta + 3\alpha\beta = 0$, torej

$$\beta = -\frac{\alpha}{1 + 3\alpha}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kvadrat $\mathbf{E}$: 2 točki.*
- *Množenje $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$: 2 točki.*
- *Upoštevanje $\mathbf{E}^2$: 2 točki.*
- *Ugotovitev $\alpha + \beta + 3\alpha\beta = 0$: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*
-

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{I} + \frac{1}{3}\left((1 + 3\alpha)^n - 1\right)\mathbf{E}$$

za poljubno celo število $n \geq 1$.

Rešitev: Formula drži za $n = 1$. Predpostavimo, da formula drži za $n - 1$. Računamo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A} \\ &= \left(\mathbf{I} + \frac{1}{3}\big((1+3\alpha)^{n-1} - 1\big)\mathbf{E}\right)(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{E}) \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{3}\big((1+3\alpha)^{n-1} - 1\big)\mathbf{E} + \alpha\mathbf{E} + \frac{\alpha}{3}\big((1+3\alpha)^{n-1} - 1\big)\mathbf{E}^2 \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{3}\big((1+3\alpha)^{n-1} - 1\big)\mathbf{E} + \alpha\mathbf{E} + \alpha\big((1+3\alpha)^{n-1} - 1\big)\mathbf{E} \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{3}\big((1+3\alpha)^{n-1} - 1 + 3\alpha(1+3\alpha)^{n-1}\big)\mathbf{E} \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{3}\big((1+3\alpha)^{n-1}(1+3\alpha) - 1\big)\mathbf{E} \\ &= \mathbf{I} + \frac{1}{3}\left((1+3\alpha)^n - 1\right)\mathbf{E}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje za* $n = 1$*: 2 točki.*
- *Indukcijska predpostavka: 2 točki.*
- *Množenje: 2 točki.*
- *Urejanje: 2 točki.*
- *Indukcijski sklep: 2 točki.*