FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

6. september 2004

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite.

a. (10) Zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ naj bo definirano rekurzivno z $x_1 = 1/2$ in $7x_{n+1} = x_n^3 + 6$. Pokažite, da je zaporedje monotono in omejeno. Sklepajte, da ima limito in jo izračunajte.

Rešitev: Očitno so vsi členi zaporedja pozitivni. Z indukcijo pokažemo, da velja $x_n < 1$ za vse n. Za $n = 1$ trditev drži po definiciji. Recimo, da velja $x_n < 1$. Potem je $x_n^3 < 1$, torej $x_n^3 + 6 < 7$. Delimo s 7 in sledi, da je $x_{n+1} < 1$. S tem je indukcijski korak zaključen.

Na osnovi prvega in drugega člena sklepamo, da je zaporedje naraščajoče. Za dokaz uporabimo spet indukcijo. Velja $x_2 > x_1$. Recimo, da velja $x_n > x_{n-1}$. Potem je

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{7}\left(x_n^3 - x_{n-1}^3\right) > 0\,,$$

torej je tudi $x_{n+1} > x_n$.

Naraščajoče omejeno zaporedje ima limito. Označimo jo z x. Vemo, da mora limita ustrezati enačbi $7x = x^3 + 6$. Rešitve te enačbe so $x = -3$, $x = 1$ in $x = 2$. Kot limita zaradi omejenosti z 1 pride v poštev le $x = 1$.

Ocenjevanje:

- *Omejenost z 1: 2 točki.*
- *Ideja z naraščanjem: 2 točki.*
- *Dokaz, da zaporedje narašča: 2 točki.*
- *Sklep o obstoju limite in enačba: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos x - 1} \right).$$

Rešitev: Izraz najprej pretvorimo. Računamo

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos x - 1} &= \frac{2(\cos x - 1) + \sin^2 x}{\sin^2 x(\cos x - 1)} \\
&= \frac{-4\sin^2(x/2) + 4\sin^2(x/2)\cos^2(x/2)}{\sin^2 x(\cos x - 1)} \\
&= \frac{4\sin^2(x/2)(\cos^2(x/2) - 1)}{\sin^2 x(\cos x - 1)} \\
&= \frac{-4\sin^4(x/2)}{\sin^2 x(\cos x - 1)}\,.
\end{aligned}$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos x-1}\right) &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{-4\sin^4(x/2)}{\sin^2 x(\cos x-1)} \\
&= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin^4(x/2)}{4(x/2)^4}\cdot\frac{x^4}{\sin^2 x(1-\cos x)} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\downarrow 0}\frac{x^2}{1-\cos x} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Skupni imenovalec: 2 točki.*
- *Pretvorba: 2 točki.*
- *Upoštevanje limite* $\sin x/x$*: 2 točki.*
- *Upoštvanje limite:* $x^2/(1-\cos x)$*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Kvader naj ima stranice x, y in z. Med vsemi kvadri, ki imajo skupno dolžino robov $R = 4(x+y+z)$ in skupno površino $S = 2(xy+xz+yz)$ želimo najti tistega z največjo prostornino $V = xyz$. Prostornino lahko izrazimo kot funkcijo x kot

$$V(x) = x\left(\frac{S}{2} - x\left(\frac{R}{4} - x\right)\right).$$

Predpostavite, da je $R^2/48 \geq R^2/12 - 2S \geq 0$. V tem primeru pridejo v poštev vrednosti x

$$\frac{R}{12} - \frac{1}{6}\sqrt{R^2 - 24S} \leq x \leq \frac{R}{12} + \frac{1}{6}\sqrt{R^2 - 24S}\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije $V(x)$ na intervalu, na katerem so lahko vrednosti x.

Rešitev: Odvajamo in poenostavimo

$$V'(x) = \frac{S + x\,(-R + 6\,x)}{2}\,.$$

Stacionarne točke so rešitve te kvadratne enačbe. Rešitve zlahka najdemo kot

$$x_1 = \frac{R}{12} + \frac{1}{12}\sqrt{R^2 - 24S} \qquad in \qquad x_2 = \frac{R}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{R^2 - 24S}\,.$$

Obe stacionarni točki sta na intervalu, kjer so lahko vrednosti x.

Ocenjevanje:

- *Odvod: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Ideja z iskanjem ničel: 2 točki.*
- *Ničli: 2 točki.*
- *Preverjanje, da so ničle na intervalu: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $R^2 - 24S = 4$ in $R^2 = 64$. Poiščite absolutni maksimum funkcije $V(x)$ na danem intervalu v tem primeru. Preverite tudi vrednosti v krajiščih intervala.

Rešitev: Drugi odvod funkcije $V(x)$ je

$$V''(x) = -\frac{R}{2} + 6x\,.$$

Sledi

$$V''(x_1) = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 24S} > 0 \qquad in \qquad V''(x_2) = -\frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 24S} < 0\,.$$

Točka x_1 je torej lokalni minimum, točka x_2 pa lokalni maksimum. Preveriti moramo še, da maksimum ni dosežen na robu intervala. Izračunamo vrednosti

$$V(1/3) = 25/108 \qquad in \qquad V(1) = 1/4\,.$$

Absolutni maksimum na intervalu je v točki $x = 1$ in točki $x = 1/2$.

Ocenjevanje:

- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Klasifikacija stacionarnih točk: 2 točki.*
- *Ideja s preverjanjem vrednosti na robu: 2 točki.*
- *Izračuni vrednsoti: 2 točki.*
- *Končni sklep: 2 točki.*

3. (20) Integriranje.

a. (10) Z uporabo integracije *per partes* izračunajte integral

$$\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\sinh^2 x \,\mathrm{d}x}{\cosh^3 x}.$$

Izberite$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh^3 x}$. Kot znano upoštevajte, da je $\sinh(\log(1+\sqrt{2})) = 1$.

Namigi:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \textit{in} \qquad \frac{1}{\cosh x} = \frac{\cosh x}{\cosh^2 x}.$$

Rešitev: Ker je $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, *je* $\cosh^2(\log(1+\sqrt{2})) = 2$. *Izberemo*

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh^3 x} \qquad \textit{in} \qquad G(x) = \sinh x\,.$$

Sledi

$$F(x) = -\frac{1}{2\cosh^2 x} \qquad \textit{in} \qquad g(x) = \cosh x\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\sinh^2 x \,\mathrm{d}x}{\cosh^3 x} &= -\frac{\sinh x}{2\cosh^2 x}\Big|_0^{\log(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{2}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x \,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x \,\mathrm{d}x}{1+\sinh^2 x} \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sinh x)\Big|_0^{\log(1+\sqrt{2})} \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izbira f: 2 točki.*
- *Izbira G: 2 točki.*
- *Prvi korak per partes: 2 točki.*
- *Drugi integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $x/(1-x) = u^2$. *Računamo*

$$x = \frac{u^2}{1+u^2} \qquad \textit{in} \qquad \frac{2\,u\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} = \mathrm{d}x\,.$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{2\,u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} \\
&= -\frac{u}{1+u^2}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \operatorname{arctg} u\bigg|_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- $\mathrm{d}x$*: 2 točki.*
- *Per partes: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) V matematični biologiji nastopi *Beverton-Holtova* diferencialna enačba

$$y' = -(a+by)y\,,$$

kjer sta a in b dani pozitivni konstanti.

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{(a+by)y} = -1\,.$$

Za rešitev je treba izračunati integral

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{(a+by)y} &= \frac{1}{a}\int \left(\frac{-b}{a+by} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{a}\left(-\log(a+by) + \log y\right)\,.\end{aligned}$$

Sledi

$$\log\left(\frac{y}{a+by}\right) = -a(x+c)$$

za neko konstanto c. Sledi

$$\frac{y}{a+by} = e^{-a(x+c)}$$

ali

$$y = \frac{ae^{-a(x+c)}}{1-be^{-a(x+c)}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis v običajno obliko: 2 točki.*
- *Pacialni ulomki: 2 točki.*
- *Integral na levi: 2 točki.*
- *Pretvorba: 2 točki.*
- *Splošna reštev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe, za katero je $y(0) = y_0 > 0$. Izračunajte še $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Rešitev: V splošni rešitvi moramo določiti ustrezno konstanto. Dobimo

$$\frac{y_0}{a+by_0} = e^{-ac}\,.$$

Sledi

$$y = \frac{ay_0e^{-ax}}{a+by_0-by_0e^{-ax}} = \frac{ay_0e^{-ax}}{a+by_0(1-e^{-ax})}\,.$$

Za limito zlahka vidimo, da je

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kam bi del?: 2 točki.*
- *Uporaba a.: 2 točki.*
- *Enačba za c: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

5. (20) Dana naj bosta pravokotna vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$. Vektor $\mathbf{a}$ je enotski. Enotski vektor $\mathbf{x}$ ustreza enačbi

$$(((\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{a})\times\mathbf{x})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\,.$$

a. (10) Izrazite dolžino vektorja $\mathbf{b}$ s skalarnim produktom $(\mathbf{a},\mathbf{x})$.

Rešitev: Računamo

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{a})\,\mathbf{x}-(\mathbf{a},\mathbf{x})\,\mathbf{a}=\mathbf{x}-(\mathbf{a},\mathbf{x})\,\mathbf{a}\,,$$

$$(((\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{a})\times\mathbf{x})=-(\mathbf{a},\mathbf{x})\,(\mathbf{a}\times\mathbf{x})$$

in

$$((((\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{a})\times\mathbf{x})\times\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{x})(-\mathbf{x}+(\mathbf{a},\mathbf{x})\,\mathbf{a})\,.$$

Dolžino vektorja $\mathbf{b}$ *izračunamo kot*

$$|\mathbf{b}|^2=(\mathbf{a},\mathbf{x})^2((\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{a},\mathbf{x})^2(\mathbf{a},\mathbf{a})-2(\mathbf{a},\mathbf{x})^2)=(\mathbf{a},\mathbf{x})^2(1-(\mathbf{a},\mathbf{x})^2)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s pravilom za trojni vektorski produkt: 2 točki.*
- *Prva uporaba: 2 točki.*
- *Druga uporaba: 2 točki.*
- *Formula za dolžino: 2 točki.*
- *Dolžina: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $|\mathbf{b}|=1/2$. Naj velja $(\mathbf{b},\mathbf{x})>0$. Izrazite vektor $\mathbf{x}$ z vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

Rešitev: Iz a. razberemo, da mora biti

$$(\mathbf{a},\mathbf{x})^2(1-(\mathbf{a},\mathbf{x})^2)=\frac{1}{4}\,,$$

torej $(\mathbf{a},\mathbf{x})=\pm\sqrt{1/2}$. *Iz*

$$(\mathbf{a},\mathbf{x})(-\mathbf{x}+(\mathbf{a},\mathbf{x})\,\mathbf{a})=\mathbf{b}$$

sledi, da je

$$\mathbf{x}=(\mathbf{a},\mathbf{x})\,\mathbf{a}-\frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{a},\mathbf{x})}\,.$$

V poštev prideta vektorja

$$\mathbf{x}=\sqrt{1/2}\,\mathbf{a}-\sqrt{2}\,\mathbf{b}\quad\textit{in}\quad\mathbf{x}=-\sqrt{1/2}\,\mathbf{a}+\sqrt{2}\,\mathbf{b}\,.$$

Ker mora biti $(\mathbf{x},\mathbf{b})>0$, *pride v poštev le drugi od obeh vektorjev.*

Ocenjevanje:

- $(\mathbf{a},\mathbf{x})$: *2 točki.*
- *Izražava* $\mathbf{x}$: *2 točki.*
- *Kandidata: 2 točki.*
- *Upoštevanje* $(\mathbf{x},\mathbf{b})>0$: *2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

6. (20) Naj bo za pozitivni števili a in b dana matrika

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a+b & -b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

b. (10) Označite $q = \sqrt{a^2+b^2-ab}$. Preverite, da je vektor $(a-b+q, -a-q, b)$ lastni vektor matrike $\mathbf{A}$. Kateri lastni vrednosti pripada?

Rešitev: Zmnožimo

$$\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a+b & -b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b+q \\ -a-q \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-ab+2aq \\ -2a^2-b^2-2aq-bq \\ b^2+ab+bq \end{pmatrix}$$

Iz zadnje komponente razberemo, da bi morala biti lastna vrednost enaka $\lambda = a+b+q$. *Preveriti moramo še ostali dve komponenti. Računamo*

$$(a+b+q)(a-b+q) = 2a^2-ab+2aq \quad in \quad (a+b+q)(-a-q) = -2a^2-b^2-2aq-bq\,.$$

Velja torej

$$\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a+b & -b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b+q \\ -a+q \\ b \end{pmatrix} = (a+b+q) \begin{pmatrix} a-b+q \\ -a-q \\ b \end{pmatrix}$$

Dani vektor je res lastni vektor.

Ocenjevanje:

- *Množenje: 2 točki.*
- *Definicija lastnega vektorja: 2 točki.*
- *Lastna vrednost: 2 točki.*
- *Preverjanje za prvo komponento: 2 točki.*
- *Preverjanje za drugo komponento: 2 točki.*

b. (10) Poiščite še ostala dva lastna vektorja matrike $\mathbf{A}$.

Namig: Lahko uporabite dejstvo, da so lastni vektorji matrike $\mathbf{A}$ *med seboj ortogonalni.*

Rešitev: Uporabimo Sarrusovo pravilo za izračun karakterističnega polinoma in dobimo

$$P(\lambda) = (a-\lambda)(a+b-\lambda)(b-\lambda) - b^2(a-\lambda) - a^2(b-\lambda)\,.$$

Poenostavimo in dobimo

$$P(\lambda) = -3\,a\,b\,\lambda + 2\,a\,\lambda^2 + 2\,b\,\lambda^2 - \lambda^3\,.$$

Prva ničla je očitno $\lambda_1 = 0$. *Ostali dve ničli sta rešitvi kvadratne enačbe*

$$\lambda^2 - 2(a+b)\lambda + 3ab\,.$$

Ničli sta

$$\lambda_2 = a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab} \qquad in \qquad \lambda_3 = a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}\,.$$

Naj bodo $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ *in* $\mathbf{x}_3$ *pripadajoči lastni vektorji. Za* λ_1 *se hitro prepričamo, da je* $\mathbf{x}_1 = (1,1,1)$. *Označimo* $q = \sqrt{a^2+b^2-ab}$. *Za* λ_2 *smo lastni vektor našli v a. Za* λ_3 *moramo najti netrivialno rešitev enačb*

$$\begin{pmatrix} -b+q & -a & 0 \\ -a & q & -b \\ 0 & -b & -a+q \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0\,.$$

Natanko tak sistem z $-q$ *namesto* q *bi dobili, če bi iskali lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti* λ_2. *Lastni vektor bi moral biti* $(a-b-q, -a+q, b)$. *Da to je, preverimo podobno kot v a.*

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Enačba za lastne vektorje: 2 točki.*
- $\mathbf{x}_1$ *: 2 točki.*
- $\mathbf{x}_3$ *: 2 točki.*