FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

1. kolokvij

19. december 1997

Ime in priimek: ________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4 in vsaka je vredna 25 točk. Na razpolago imate 1 uro in pol (90 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Zaporedje je definirano z rekurzivno fomulo

$$x_0 = 1 \qquad \text{in} \qquad x_{n+1} = x \cdot x_n \cdot (1 + \frac{1}{n})^{-n} .$$

a. (10) Za katere x vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ konvergira?

Rešitev: Uporabimo kvocientni kriterij in računamo

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{|x|}{e} .$$

Ta limita je strogo manjša od 1, ko je $|x| < e$. Vrsta torej konvergira za te x.

Ocenjevanje:

- *Ideja za uporabo kvocientnega kriterija: 2 točki.*
- *Pravilni nastavek za računanje limite: 2 točki.*
- *Pravilni izračun kvocienta: 2 točke.*
- *Pravilni izračun limite: 2 točki.*
- *Sklep o konvergenci: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $x = e$. Prepričajte se, da je zaporedje $x_0, x_1, \ldots$ naraščajoče in je $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Namig: Upoštevajte, da zaporedje $(1+1/n)^n$ narašča. Za izračun limite je dovolj pokazati, da je $\lim_{\to\infty} \log x_n = \infty$. Upoštevajte, da je

$$\log x_n = (\log x_n - \log x_{n-1}) + (\log x_{n-1} - \log x_{n-2}) + \cdots + (\log x_1 - \log x_0)$$

in neenačbo $\log(1+x) \leq x - x^2/2 + x^3/3$ za $0 \leq x < 1$.

Rešitev: Iz rekurzivne formule sledi

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{e}{(1+\frac{1}{k})^k} > 1 ,$$

ker je zaporedje v imenovalcu naraščajoče z limito e. Sledi, da je zaporedje naraščajoče.

Logaritmiramo rekurzivno formulo in dobimo

$$\begin{aligned}
\log x_{k+1} - \log x_k &= \log e - k \log(1 + \frac{1}{k}) \\
&\geq 1 - k(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3}) \quad \textit{Namig!} \\
&= \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} .
\end{aligned}$$

Upoštevamo še enkrat namig in dobimo

$$\log x_n \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} \right) .$$

Ko $n \to \infty$, *vrsta na desni divergira in je torej tudi* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Ocenjevanje:

- *Dokaz, da je zaporedje naraščajoče: 4 točke.*
- *Pravilno logaritmiranje rekurzivne formule: 3 točke.*
- *Ocena razlike logaritmov zaporednih členov: 3 točke.*
- *Opažanje, da razlike divergirajo: 3 točke.*
- *Sklep: 2 točki.*

2. (25) Limite, L'Hospitalovo pravilo.

a. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}(x))^{\frac{1}{\sin x}}\,.$$

Rešitev: Najprej logaritmiramo in nato uporabimo L'Hospitalovo pravilo, pri čemer preverimo, da sta v limiti števec in imenovalec enaka 0.

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\mathrm{tg}(x))}{\sin x} \\ = \ & \lim_{x\to 0}\frac{1+\mathrm{tg}^2(x)}{(1+\mathrm{tg}(x))\cos x} \\ = \ & 1\,. \end{aligned}$$

Želena limita je torej e.

Ocenjevanje:

- *Logaritmiranje: 3 točke.*
- *Preverjanje 0/0: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Antilogaritmiranje: 3 točke.*

b. (15) Izračunajte

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

Rešitev: Izraz nekoliko predelamo in uporabimo L'Hospitalovo pravilo.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \\
= & \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3\cdot 2\cdot x} \\
= & \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Preobrazba izraza na obliko primerno za L'Hospitala: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje in preverjanje 0/0: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje in preverjanje 0/0: 2 točk1.*
- *Rezultat: 4 točke.*

3. (25) Funkcija g je definirana na intervalu $[0,2]$ z

$$g(y) = \arccos(1-y) - \sqrt{(2-y)y}\,.$$

a. (10) Pokažite, da je g na $[0,2]$ strogo narašcajoča in ima inverzno funkcijo.

Rešitev: Z uporabo pravila za odvajanje sestavljenih funkcij dobimo

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{(2-y)y}} + \frac{y-1}{\sqrt{(2-y)y}} = \sqrt{\frac{y}{2-y}}\,.$$

Odvod je na $(0,2)$ pozitiven, torej je funkcija strogo naraščajoča na $[0,2]$. Strogo narašačajoče funkcije imajo inverzno funkcijo.

- *Odvod: 4 točke.*
- *Pozitivnost odvoda: 3 točke.*
- *Sklep, da inverzna funkcija obstaja: 3 točke.*

b. (15) Naj bo f inverzna funkcija funkcije g. Izračunajte $f'(\pi/4 - \sqrt{2}/2)$.

Rešitev: Po formuli za odvajanje inverzne funkcije je

$$f'(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{g'(f(\pi/4 - \sqrt{2}/2))}\,.$$

V a. smo izračunali

$$g'(y) = \sqrt{\frac{y}{2-y}}\,.$$

Potrebujemo še $f(\pi/4 - \sqrt{2}/2)$, torej rešitev enačbe

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos(1-y) - \sqrt{(2-y)y}\,.$$

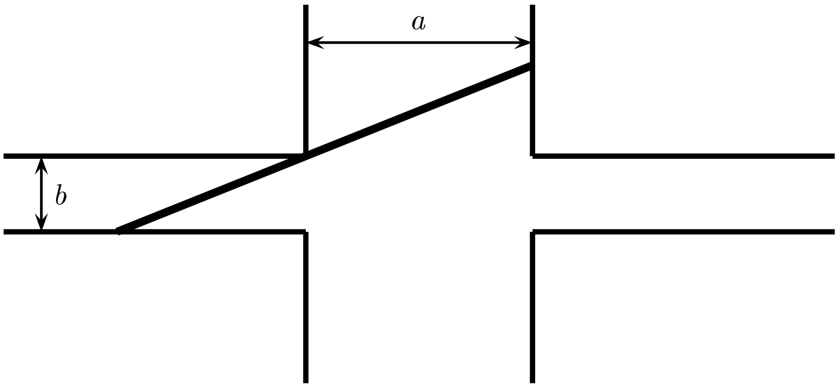
Možna rešitev je rešitev enačbe $\arccos(1-y) = \pi/4$, *ki je $y = 1 - \sqrt{2}/2$. Hitro se prepričamo, da je ta y želena rešitev. Odvod je potem*

$$f'(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Rešitev za y: 5 točk.*
- *Formula za $f'(y)$: 5 točk.*
- *Rezultat: 5 točk.*

4. (25) Hodnika širine a in b se sekata pod pravim kotom, višina obeh hodnikov pa je h.



a. (15) Kako dolga je najdaljša palica, ki jo lahko prenesemo čez kot med hodnikoma?

Rešitev: Za spremenljivko si izberemo kot med palico in steno hodnika širine b. Po Pitagorovem izreku je pri danem kotu θ največja dolžina palice enaka

$$F(\theta) = \sqrt{(\frac{b}{\sin\theta} + \frac{a}{\cos\theta})^2 + h^2}\,.$$

Dovolj je poiskati minimum izraza v oklepaju pod zgornjim korenom. Z odvajanjem dobimo

$$-\frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0$$

ali

$$\mathrm{ctg}\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\,.$$

Dolžina palice bo torej

$$F(\mathrm{arcctg}(\sqrt[3]{\frac{a}{b}})) = \sqrt{(a^{2/3} + b^{2/3})^3 + h^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izbor spremenljivke: 3 točke.*
- *Izračun dolžine: 3 točke.*
- *Odvajanje: 3 točke.*

- *Stacionarna točke: 3 točke.*
- *Dolžina palice: 3 točke.*

b. (10) Preverite, da ste v a. res našli minimum.

Rešitev: Spet je dovolj, da se prepričamo, da je drugi odvod izraza

$$\frac{b}{\sin\theta} + \frac{a}{\cos\theta}$$

pozitiven za kot $\mathrm{ctg}\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. *Odvajamo dvakrat in dobimo*

$$\begin{aligned} & \frac{b(\sin^3\theta - 2\cos^2\theta\sin\theta)}{\sin^4\theta} + \frac{a(\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)}{\cos^4\theta} \\ = \; & \frac{b}{\sin^3\theta} + \frac{b\cdot\mathrm{ctg}^2\theta}{\sin\theta} + \frac{a}{\cos^3\theta} + \frac{a\cdot\mathrm{tg}^2\theta}{\cos\theta} > 0\,, \end{aligned}$$

ker so vsi koti med 0 *in* $\pi/2$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je potrebno računati drugi odvod: 3 točke.*
- *Pravilen drugi odvod: 3 točke.*
- *Opažanje, da je drugi odvod* > 0 *in sklep: 4 točke.*