FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

1. kolokvij

10. december 1999

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo $0 < a_1 < 1$ in naj bo zaporedje $\{a_n\}$ dano z rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}\,.$$

a. (15) Z uporabo matematične indukcije dokažite, da za vse člene zaporedja velja $0 < a_n < 1$. Pokažite, da je zaporedje padajoče in sklepajte, da zaporedje ima limito.

Rešitev: Najprej se lotimo omejenosti. Dokažemo, da je $0 < a_n < 1$ za vse $n \geq 1$.

Trditev po predpostavki velja za $n = 1$.

Recimo, da velja $0 < a_n < 1$. Potem je tudi $0 < \sqrt{1 - a_n} < 1$, torej tudi

$$0 < 1 - \sqrt{1 - a_n} < 1\,.$$

Za dokaz, da je zaporedje padajoče računamo:

$$1 - a_{n+1} = \sqrt{1 - a_n} > 1 - a_n\,,$$

ker za $x \in (0,1)$ velja $\sqrt{x} > x$. Torej je $a_n > a_{n+1}$. Zaporedje je torej padajoče in navzdol omejeno, zato ima limito.

Ocenjevanje:

- *Prvi korak pri indukciji: 3 točke.*
- *Indukcijska predpostavka: 3 točke.*
- *Indukcijski sklep: 3 točke.*
- *Ideja z odštevenjem (ali kakršna koli druga ideja): 3 točke.*
- *Izpeljava ideje in sklep: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{in pokažite} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\,.$$

Rešitev: Vemo, da prva limita obstaja in označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Limita mora ustrezati enačbi $a = 1 - \sqrt{1 - a}$ in veljati mora $0 \leq a < 1$. Rešitev te enačbe, ki ustreza pogojem, je $a = 0$, torej je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Za limito kvocientov računamo

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1 - \sqrt{1 - a_n}}{a_n} \\
&= \frac{(1 - \sqrt{1 - a_n})(1 + \sqrt{1 - a_n})}{a_n(1 + \sqrt{1 - a_n})} \\
&= \frac{1 - (1 - a_n)}{a_n(1 + \sqrt{1 - a_n})} \\
&= \frac{1}{1 + \sqrt{1 - a_n}}
\end{aligned}$$

Uporabimo, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *in dobimo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-a_n}} = \frac{1}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Sklep, da limita obstaja in enačba za prvo limito: 2 točki.*
- *Prva limita: 2 točki.*
- *Ideja, da zapremo kvocient v interval: 2 točki.*
- *Izpeljava ideje: 2 točki.*
- *Sklep, da je limita enaka 1/2: 2 točki.*

2. (25) Naj bo A_n število diagonal v n-kotniku. V kvadratu, recimo, sta 2 diagonali, v petkotniku 5 itd.

a. (15) Utemeljite, da je $A_{n+1} - A_n = n - 1$.

Namig: Dodajte n-kotniku novo točko.

Rešitev: Mislimo si lahko, da je novo oglišče mnogokotnika oglišče trikotnika, ki ima za ostali dve oglišči krajišči ene od stranic mnogokotnika. Z tem novim krajiščem pridobimo nekaj diagonal. Krajišči osnovnice ne štejeta, ker dobimo stranici in ne diagonali, ostalih $n-2$ oglišč pa prispeva novo diagonalo. Nova diagonala je tudi osnovnica trikotnika.

Ocenjevanje:

- *Ideja s trikotnikom: 5 točk.*
- *Preštevanje novih diagonal: 5 točk.*
- *Sklep: 5 točk.*

b. (10) Z matematično indukcijo dokažite, da je

$$A_n = \frac{n(n-3)}{2}\,.$$

Namig: Uporabite a., tudi če ne znate dokazati.

Rešitev: Formula drži za $n = 4$. Narediti moramo še indukcijski korak. Recimo, da formula drži za n. Po a. je

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= A_n + (n-1) \\
&= \frac{n(n-3)}{2} + (n-1) \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \\
&= \frac{n^2 - n - 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

Formula velja torej tudi za $n+1$ in s tem po matematični indukciji za vse n.

Ocenjevanje:

- *Prvi korak: 2 točki.*
- *Formulacija indukcijske predpostavke: 2 točki.*
- *Nastavek, kaj je treba: 2 točki.*
- *Izračun: 2 točki.*
- *Končni sklep: 2 točki.*

3. (25) Dana naj bo vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}.$$

a. (10) Ali vrsta konvergira? Ali konvergira absolutno?

Rešitev: Predznaki členov v vrsti alternirajo, členi vrste pa po absolutni vrednosti konvergirajo proti 0*. Torej vrsta konvergira. Vrsta konvergira tudi absolutno. V to se lahko prepričamo, recimo, z majorantnim kriterijem. Vemo*

$$\frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ *konvergira, mora tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+2))$.

Ocenjevanje:

- *Alterniranje členov: 2 točki.*
- *Konvergenca členov proti* 0*: 2 točki.*
- *Definicija absolutne konvergence: 2 točki.*
- *Majorantni, ali kakšen drug, kriterij: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Seštejte vrsto.

Rešitev: Opazimo najprej

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n(n+2)}.$$

Zapišimo delno vsoto s_n *kot*

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) \\ &- \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \\ &+ \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) \\ &- \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) \\ &+ \frac{1}{2}(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) \\ &+ \cdots\cdots \\ &+ \frac{(-1)^{n+1}}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) \end{aligned}$$

Sklepamo,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}) = \frac{1}{4}.$$

Ocenjevanje:

- *Parcialni ulomki: 3 točke.*
- *Delna vsota: 3 točke.*
- *Seštevek delne vsote (ali podobno sklepanje): 3 točke.*
- *Sklepanje, da "moteči" členi v seštevku gredo proti* 0*: 3 točke.*
- *Vsota: 3 točke.*

4. (25) Limite:

a. (10) Izračunajte

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{x-\pi/4}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/4} \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{x-\pi/4} &= \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x(x-\pi/4)} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos 2x}{x-\pi/4} \\
&= 2\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin(\pi/2-2x)}{x-\pi/4} \\
&= 2\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{-\frac{t}{2}} \qquad \textit{Nova spr.: } t=\pi/2-2x \\
&= -4
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Pretvorba na dvojne kote: 2 točki.*
- *Izločitev kosinusa: 2 točki.*
- *Vpeljava nove spremenljivke: 2 točki.*
- *Uporaba na* $\sin x/x$*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Če veste, da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1\,,$$

izračunajte

$$\lim_{x\to 0} (1+\log(1+x))^{\frac{1}{x}}\,.$$

Rešitev: Najprej funkcijo logaritmiramo in uvedemo novo spremenljivko $y = \log(1+x)$*. Računamo*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+\log(1+x)) &= \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{e^y-1} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y}\cdot\frac{y}{e^y-1} \\
&= 1\cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Uporabili smo znano limito

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1\,.$$

Da dobimo originalno limito, moramo še "anti-logaritmirati" in dobimo

$$\lim_{x\to 0}(1+\log(1+x))^{\frac{1}{x}} = e\,.$$

Ocenjevanje:

- *Logaritmiranje: 3 točke.*
- *Nova spremenljivka: 3 točke.*
- *Vrivanje y: 3 točke.*
- *Uporaba znanih limit: 3 točke.*
- *Antilogaritmiranje in rezultat: 3 točke.*