FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

1. kolokvij

14. december 2001

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Zaporedje $x_0, x_1, \ldots$ naj bo definirano rekurzivno z $x_0 = 0$ in

$$x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}\,.$$

a. (15) Pokažite, da je zaporedje navzgor omejeno s 4 in naraščajoče.

Rešitev: Uporabimo matematično indukcijo. Očitno je $x_0 \leq 4$. Če je $0 \leq x_n \leq 4$, potem je $\sqrt{x_n} \leq 2$, torej $x_{n+1} \leq 1 + 2 \leq 4$. Zaporedje je navzgor omejeno s 4. Tudi monotonost dokažemo z matematično indukcijo. Očitno je $x_1 > x_0$. Pa denimo, da je $x_n > x_{n-1}$. Potem velja tudi neenačba

$$x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n} > 1 + \sqrt{x_{n-1}} = x_n\,.$$

Torej je $x_{n+1} > x_n$ in indukcijski korak je narejen.

Ocenjevanje:

- *Indukcijska predpostavka za omejenost: 3 točke.*
- *Indukcijski korak za omejenost: 3 točke.*
- *Prava ideja za monotonost: 3 točke.*
- *Formulacija indukcijske predpostavke: 3 točke.*
- *Indukcijski sklep: 3 točke.*

b. (10) Sklepajte, da ima zaporedje limito in jo izračunajte.

Rešitev: Naraščajoča omejena zaporedja imajo vedno limito. Označimo limito v našem primeru z x. Zanjo mora veljati enačba

$$x = 1 + \sqrt{x}\,.$$

Označimo $u = \sqrt{x}$ in zgornja enačba preide v kvadratno enačbo

$$u^2 - u - 1 = 0$$

z rešitvama $u = (1 \pm \sqrt{5})/2$. V poštev pride le pozitivna rešitev, zato je

$$x = u^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Sklep, da limita obstaja: 2 točki.*
- *Enačba za limito: 2 točki.*
- *Rešitvi enačbe za limito: 2 točki.*
- *Sklep, da pride v poštev le pozitivna rešitev: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

2. (25) Leonardo di Pisa-Fibonacci (1170-1240) je definiral zaporedje *Fibonaccijevih* števil rekurzivno s formulo:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \qquad \text{in} \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,.$$

Prvih nekaj Fibonaccijevih števil je tako 0,1,1,2,3,5,8,....

a. (15) Z matematično indukcijo pokažite, da velja

$$F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right)\,.$$

Namig: $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})^2 = 3+\sqrt{5}$.

Rešitev: Brž lahko preverimo, da formula velja za $n = 0$ *in* $n = 1$*. Predpostavimo, da formula velja za vsa števila* $0, 1, \ldots, n$*. Računamo*

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
&= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n + 2(1+\sqrt{5})^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{n-1}(3+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^{n-1}(3-\sqrt{5})\right) \\
&= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{n-1}\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^{n-1}\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})^2\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right)\,.
\end{aligned}$$

S tem je indukcijski korak zaključen.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje za* $n = 0$ *in* $n = 1$*: 3 točke.*
- *Formulacija indukcijske predpostavke: 3 točke.*
- *Uporaba dane formule za* F_{n+1}*: 3 točke.*
- *Preoblikovanje členov in uporaba namiga: 3 točke.*
- *Indukcijski sklep: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}\,.$$

Rešitev: Označimo

$$\lambda = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \qquad \textit{in} \qquad \mu = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\,.$$

Opazimo, da je $|\lambda| > |\mu|$*. Kvocient* F_{n+1}/F_n *lahko zapišemo kot*

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}{\lambda^n - \mu^n}\,.$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}{\lambda^n - \mu^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda - \mu(\mu/\lambda)^n}{1 - (\mu/\lambda)^n} \\
&= \lambda \,,
\end{aligned}
$$

ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu^n}{\lambda^n} = 0 \,.$$

Ocenjevanje:

- *Zapis s kvocientom: 2 točki.*
- *Opažanje* $|\lambda > ||\mu|$*: 2 točki.*
- *Deljenje: 2 točki.*
- *Preureditev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Naj bo zaporedje a_n dano z

$$a_n = \frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}$$

za $\alpha > 0$.

a. (10) Pokažite, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Rešitev: Takoj vidimo, da je

$$\frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} < \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

Ker vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergira, lahko uporabimo izrek o majorizirani vrsti. Dana vrsta torej konvergira.

Ocenjevanje:

- *Izbor kriterija: 2 točki.*
- *Ideja, s čim majorizirati: 2 točki.*
- *Majoriziranje: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da vrsta, ki majorizira, konvergira: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Seštejte vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Rešitev: Zapišemo lahko

$$\frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} = \frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n+\alpha+1}\,.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{2+\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2+\alpha} - \frac{1}{3+\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n+\alpha+1}\right) \\ &= \frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{n+\alpha+1}\,. \end{aligned}$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1+\alpha}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Razcep na parcialne ulomke: 3 točke.*
- *Formula za s_n: 3 točke.*
- *Delna vsota: 3 točke.*
- *Limita delne vsote: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Limite funkcij:

a. (10) Izračunajte

$$\lim_{u\downarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2}\,.$$

Rešitev: Števec in imenovalec pomnožimo z $1+\sqrt{1-u^2}$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\lim_{u\downarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2} &= \lim_{u\downarrow 0} \frac{(1-\sqrt{1-u^2})(1+\sqrt{1+u^2})}{u^2(1+\sqrt{1-u^2})} \\
&= \lim_{u\downarrow 0} \frac{1-(1-u^2)}{u^2(1+\sqrt{1-u^2})} \\
&= \lim_{u\downarrow 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-u^2}} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z množenjem: 2 točki.*
- *Izbor faktorja: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})\,.$$

Namig: Pišite $x=1/u$, *potem množite in delite z* $\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}+2$.

Rešitev: Pišimo $u=1/x$. *Limita preide v*

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\downarrow 0} u^{-3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{u}}+\sqrt{\frac{1}{u}-1}-2\sqrt{\frac{1}{u}}\right) \\
&= \lim_{u\downarrow 0} u^{-2}(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2) \\
&= \lim_{u\downarrow 0} u^{-2}\frac{(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2)(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}+2)}{(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}+2)} \\
&= \lim_{u\downarrow 0} u^{-2}\frac{(1+u)+(1-u)+2\sqrt{1-u^2}-4}{(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}+2)} \\
&= \lim_{u\downarrow 0} (-2)\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2}\frac{1}{(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}+2)} \\
&= -\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Zamenjava x z $1/u$: 3 točke.*
- *Množenje in deljenje: 3 točke.*
- *Poenostavitev: 3 točke.*
- *Krajšanje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*