FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

1. kolokvij

28. november 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (25) Zaporedji $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $b_0, b_1, b_2, \ldots$ naj bosta dani rekurzivno z $a_0 = 2$ in $b_0 = 1$ in

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{in} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,.$$

a. (15) Z matematično indukcijo pokažite, da je $b_n \le b_{n+1} \le a_{n+1} \le a_n$.

Namig: Upoštevajte, da za $x, y \ge 0$ velja $\sqrt{xy} \le \frac{1}{2}(x+y)$.

Rešitev: Ker je $a_1 = 3/2$ in $b_1 = \sqrt{2}$, neenakosti veljajo za $n = 0$. Recimo, da neenakosti veljajo za $n-1$, torej $b_{n-1} \le b_n \le a_n \le a_{n-1}$. Velja

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \le \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n\,.$$

Velja

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \ge \sqrt{b_n b_n} = b_n\,.$$

Velja

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \le \frac{1}{2}(a_n + b_n) = a_{n+1}$$

po namigu. Indukcijski korak je s tem zaključen.

Ocenjevanje:

- *Začetek indukcije: 3 točke.*
- *Indukcija za 1. neenakost: 3 točke.*
- *Indukcija za 2. neenakost: 3 točke.*
- *Indukcija za 3. neenakost: 3 točke.*
- *Uporaba dane neenakosti: 3 točke.*

b. (10) Utemeljite, da imata zaporedji a_n in b_n limiti in dokažite, da sta limiti enaki.

Rešitev: Zaporedje $a_0, a_1, \ldots$ je padajoče in navzdol omejeno z 0, zato ima limito, ko $n \to \infty$. Zaporedje $b_0, b_1, \ldots$ je naraščajoče in navzgor omejeno z $a_0 = 2$, torej ima limito, ko $n \to \infty$. Označimo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \textit{in} \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Ker je $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, mora veljati

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}(a+b)\,.$$

Sledi $a = b$.

Ocenjevanje:

- *Monotonost a_n: 2 točki.*
- *Omejenost a_n: 2 točki.*
- *Monotonost b_n: 2 točki.*
- *Omejenost b_n: 2 točki.*
- *Ideja in izvedba za enakost limit: 2 točki.*

2. (25) Naj bo funkcija $G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dana z

$$G(x) = 1 - \log(2 - e^{x-1})\,.$$

Funkcije $G_1, G_2, \ldots$ na intervalu $[0,1]$ naj bodo definirane rekurzivno s predpisom $G_1 = G$ in

$$G_{n+1}(x) = (G_n \circ G)(x) = G_n(G(x))\,.$$

a. (15) Z matematično indukcijo dokažite, da velja

$$G_n(x) = 1 + \log\left(\frac{n-(n-1)e^{x-1}}{n+1-ne^{x-1}}\right)\,.$$

Rešitev: Formula drži za $n = 1$. Recimo, da formula drži za n. Računamo

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= G_n(G(x)) \\ &= 1 + \log\left(\frac{n-(n-1)e^{G(x)-1}}{n+1-ne^{G(x)-1}}\right) \\ &= 1 + \log\left(\frac{n-(n-1)\frac{1}{2-e^{x-1}}}{n+1-n\frac{1}{2-e^{x-1}}}\right) \\ &= 1 + \log\left(\frac{n+1-ne^{x-1}}{n+2-(n+1)e^{x-1}}\right)\,. \end{aligned}$$

Indukcijski korak je s tem zaključen.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje za $n = 1$: 3 točke.*
- *Formulacija indukcijske predpostavke: 3 točke.*
- *Uporaba dane formule za G_{n+1}: 3 točke.*
- *Preoblikovanje členov: 3 točke.*
- *Indukcijski sklep: 3 točke.*

b. (10) Definirajte zaporedje rekurzivno z $a_1 = G_1(0)$ in $a_{n+1} = G(a_n)$. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Rešitev: Z uporabo a. ugotovimo, da je $a_n = G_n(0)$. Vemo, da je

$$G_n(0) = 1 + \log\left(\frac{n-(n-1)e^{-1}}{n+1-ne^{-1}}\right)\,.$$

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-(n-1)e^{-1}}{n+1-ne^{-1}} = 1\,,$$

je

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = 1\,.$$

Ocenjevanje:

- *Upoštevanje rezultata iz a.: 2 točki.*
- *Opažanje, da je $a_n = G_n(0)$: 2 točki.*
- *Notranja limita: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

3. (25) Za $\alpha > 0$ naj bo dana vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\, q^k\,,$$

kjer je $|q| < 1$.

a. (10) Prepričjate se, da zgornja vrsta konvergira.

Rešitev: Uporabimo, recimo, kvocientni kriterij za konvergenco vrst. Računamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} q\right| \\ &= |q|\,. \end{aligned}$$

Ker je $|q| < 1$, vrsta konvergira.

Ocenjevanje:

- *Izbira kriterija: 2 točki.*
- *Zapis limite: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $\alpha = 1$. Izračunajte

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\, q^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k$$

kjer je $|q| < 1$.

Namig: Naj bo s_n delna vsota vrste. Pokažite, da je

$$s_n = qs_{n-1} + q + q^2 + \cdots + q^n\,.$$

Rešitev: Najprej preverimo namig. Računamo

$$\begin{aligned} &qs_{n-1} + q + q^2 + \cdots q^n = \\ &= q(q + 2q^2 + \cdots + (n-1)q^{n-1}) + (q + q^2 + \cdots q^n) \\ &= (q^2 + 2q^3 + \cdots + (n-1)q^n + (q + q^2 + \cdots q^n) \\ &= q + 2q^2 + \cdots + nq^n \\ &= s_n\,. \end{aligned}$$

Vemo, da vrsta konvergira. Označimo $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Ker velja

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(qs_{n-1} + q + q^2 + \cdots + q^n\right)\,,$$

velja

$$s = qs + \sum_{k=1}^{\infty} q^k = qs + \frac{q}{1-q}\,.$$

Sledi

$$s = \frac{q}{(1-q)^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje namiga: 3 točke.*
- *Ideja z limito obeh strani: 3 točke.*
- *Upoštevanje dejstva, da vrsta konvergira: 3 točke.*
- *Uporaba geometrijske vrste: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Naj bo α dano realno število. Kot znano privzemite, da velja

$$\lim_{u\to 0}\frac{(u+1)^\alpha-1}{u}=\alpha \qquad \text{in} \qquad \lim_{u\to 0}\frac{(u+1)^\alpha+(1-u)^\alpha-2}{u^2}=\alpha(\alpha-1)\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha}\big((1+x)^\alpha-x^\alpha\big)=\alpha\,.$$

Rešitev: Uvedimo novo spremenljivko $x=1/u$. Računamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha}\big((1+x)^\alpha-x^\alpha\big)=\\
&=\lim_{u\to 0}\frac{u^\alpha}{u}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^\alpha-\left(\frac{1}{u}\right)^\alpha\right)\\
&=\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\big((u+1)^\alpha-1\big)\\
&=\lim_{u\to 0}\frac{(u+1)^\alpha-1}{u}\\
&=\alpha\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja nove spremenljivke: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Prepis: 2 točki.*
- *Množenje z u^α: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} x^{2-\alpha}\left((1+x)^\alpha+(x-1)^\alpha-2x^\alpha\right)\,.$$

Rešitev:s Uvedemo $x=1/u$. Računamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^{2-\alpha}\left((1+x)^\alpha+(x-1)^\alpha-2x^\alpha\right)=\\
&=\lim_{u\to 0}\frac{u^\alpha}{u^2}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^\alpha+\left(\frac{1}{u}-1\right)^\alpha-2\left(\frac{1}{u}\right)^\alpha\right)\\
&=\lim_{u\to 0}\frac{1}{u^2}\Big((u+1)^\alpha+(1-u)^\alpha-2\Big)\\
&=\lim_{u\to 0}\frac{(u+1)^\alpha+(1-u)^\alpha-2}{u^2}\\
&=\alpha(\alpha-1)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja nove spremenljivke: 3 točke.*
- *Nova spremenljivka: 3 točke.*
- *Prepis: 3 točke.*
- *Množenje z u^α: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*