FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

1. kolokvij

28. november 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Zaporedji $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $b_0, b_1, b_2, \ldots$ naj bosta dani rekurzivno z $a_0 = 2$ in $b_0 = 1$ in

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{in} \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,.$$

a. (15) Z matematično indukcijo pokažite, da je $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$.

Namig: Upoštevajte, da za $x, y \geq 0$ *velja* $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$.

Rešitev: Ker je $a_1 = \sqrt{2}$ *in* $b_1 = 4/3$, *neenakosti veljajo za* $n = 0$. *Recimo, da neenakosti veljajo za* $n - 1$, *torej* $b_{n-1} \leq b_n \leq a_n \leq a_{n-1}$. *Velja*

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{a_n a_n} = a_n\,.$$

Velja

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \geq \frac{2a_n b_n}{a_n + a_n} = b_n\,.$$

Velja

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \leq \sqrt{a_n b_n} = a_{n+1}$$

po namigu. Indukcijski korak je s tem zaključen.

Ocenjevanje:

- *Začetek indukcije: 3 točke.*
- *Indukcija za 1. neenakost: 3 točke.*
- *Indukcija za 2. neenakost: 3 točke.*
- *Indukcija za 3. neenakost: 3 točke.*
- *Uporaba dane neenakosti: 3 točke.*

b. (10) Utemeljite, da imata zaporedji a_n in b_n limiti in dokažite, da sta limiti enaki.

Rešitev: Zaporedje $a_0, a_1, \ldots$ *je padajoče in navzdol omejeno z* 0, *zato ima limito, ko* $n \to \infty$. *Zaporedje* $b_0, b_1, \ldots$ *je naraščajoče in navzgor omejeno z* $a_0 = 2$, *torej ima limito, ko* $n \to \infty$. *Označimo*

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \quad \textit{in} \quad b = \lim_{n \to \infty} b_n\,.$$

Ker je $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, *mora veljati*

$$a = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{ab}\,.$$

Sledi $a = b$.

Ocenjevanje:

- *Monotonost* a_n: *2 točki.*
- *Omejenost* a_n: *2 točki.*
- *Monotonost* b_n: *2 točki.*
- *Omejenost* b_n: *2 točki.*
- *Ideja in izvedba za enakost limit: 2 točki.*

2. (25) Naj bo funkcija $G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dana z

$$G(x) = 1 - \alpha(1-x)^{\beta},$$

kjer je $0 < \alpha, \beta < 1$. Funkcije $G_1, G_2, \ldots$ na intervalu $[0,1]$ naj bodo definirane rekurzivno s predpisom $G_1 = G$ in

$$G_{n+1}(x) = (G_n \circ G)(x) = G_n(G(x)).$$

a. (15) Z matematično indukcijo dokažite, da velja

$$G_n(x) = 1 - \alpha^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}(1-x)^{\beta^n}.$$

Rešitev: Formula drži za $n = 1$. Recimo, da formula drži za n. Računamo

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= G_n(G(x)) \\ &= 1 - \alpha^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}(1-G(x))^{\beta^n} \\ &= 1 - \alpha^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}\left(\alpha(1-x)^{\beta}\right)^{\beta^n} \\ &= 1 - \alpha^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}+\beta^n}(1-x)^{\beta^{n+1}} \\ &= 1 - \alpha^{\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}}(1-x)^{\beta^{n+1}}. \end{aligned}$$

Indukcijski korak je s tem zaključen.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje za $n = 1$: 3 točke.*
- *Formulacija indukcijske predpostavke: 3 točke.*
- *Uporaba dane formule za G_{n+1}: 3 točke.*
- *Preoblikovanje členov: 3 točke.*
- *Indukcijski sklep: 3 točke.*

b. (10) Definirajte zaporedje rekurzivno z $a_1 = G_1(0)$ in $a_{n+1} = G(a_n)$. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Rešitev: Z uporabo a. ugotovimo, da je $a_n = G_n(0)$. Vemo, da je

$$G_n(0) = 1 - \alpha^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = 1 - \alpha^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Ocenjevanje:

- *Upoštevanje rezultata iz a.: 2 točki.*
- *Opažanje, da je $a_n = G_n(0)$: 2 točki.*
- *Notranja limita: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

3. (20) Za dano celo število $p > 0$ naj bo dana vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2p)} .$$

a. (10) Prepričajte se, da zgornja vrsta konvergira.

Rešitev: V našem primeru je

$$a_k = \frac{1}{k(k+2p)} ,$$

torej je

$$2^k a_{2^k} = \frac{2^k}{2^k(2^k+2p)} = \frac{1}{2^k+2p} .$$

Vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+2p}$$

konvergira, saj je majorizirana s konvergentno vrsto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} .$$

Po Cauchyjevem kriteriju sledi, da tudi začetna vrsta konvergira.

Ocenjevanje:

- *Zapis a_k: 2 točki.*
- *Zapis $2^k a_{2^k}$: 2 točki.*
- *Opažanje, da je vrsta majorizirana: 2 točki.*
- *Konvergenca geometrijske vrste: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $p = 2$. Delna vsota s_n je dana z $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, kjer je $a_k = 1/(k(k+4))$. Pokažite, da je za $n \geq 4$

$$s_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

in izračunajte $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Rešitev: Poskusimo z nastavkom

$$\frac{1}{k(k+4)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+4} .$$

Ko damo člena na skupni imenovalec dobimo

$$\frac{1}{k(k+4)} = \frac{A(k+4)+Bk}{k(k+4)} .$$

Enakost velja, če izberemo $A = 1/4$ in $B = -1/4$. Računamo

$$
\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right).
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}\,.
$$

Ocenjevanje:

- *Razčlenitev imenovalca: 3 točke.*
- *Nastavek za parcialne ulomke: 3 točke.*
- *a in b: 3 točke.*
- *Zapis delne vsote: 3 točke.*
- *Vsota vrste: 3 točke.*

4. (25) Naj bosta $\alpha, \beta > 0$ in m pozitivno celo število.

a. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x^2} .$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x^2} &= \\ &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(\beta x)}{x^2} - \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\sin^2(\beta x/2)}{x^2} - \frac{2\sin^2(\alpha x/2)}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\beta^2 \sin^2(\beta x/2)}{4(\beta x/2)^2} - \frac{2\alpha^2 \sin^2(\alpha x/2)}{4(\alpha x/2)^2} \right) \\ &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Zapis z razliko: 2 točki.*
- *Dvojni koti: 2 točke.*
- *Dodajanje konstant: 2 točki.*
- *Uporaba* $\sin x / x \to 1$*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte limito

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos(\alpha x)} - \sqrt[m]{\cos(\beta x)}}{x^2} .$$

Namig: $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})$.

Rešitev: V namigu izberimo $a = \sqrt[m]{\cos(\alpha x)}$ *in* $b = \sqrt[m]{\cos(\beta x)}$*. Sledi*

$$\sqrt[m]{\cos(\alpha x)} - \sqrt[m]{\cos(\beta x)} = \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{\left(\sqrt[m]{\cos(\alpha x)}\right)^{m-1} + \cdots + \left(\sqrt[m]{\cos(\beta x)}\right)^{m-1}} .$$

Računamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos(\alpha x)} - \sqrt[m]{\cos(\beta x)}}{x^2} &= \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[m]{\cos(\alpha x)}\right)^{m-1} + \cdots + \left(\sqrt[m]{\cos(\beta x)}\right)^{m-1}} \\ &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2m} . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Kaj z namigom?: 3 točke.*
- *Izražava števca: 3 točke.*
- *Uporaba a.: 3 točke.*
- *Člen* $1/m$*: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*