**FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO**

**Matematika 1**

**2. kolokvij**

**16. januar 1998**

**Ime in priimek:** ______________________________ **Letnik:** __________

## Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4 in vsaka je vredna 25 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 1 uro in pol (90 min).

| Naloga | a. | b. | Skupaj |
|---|---|---|---|
| 1. | | | |
| 2. | | | |
| 3. | | | |
| 4. | | | |
| Skupaj | | | |

REŠITVE

**1.** (25) Funkcija $f$ naj bo dana s predpisom

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x}) .$$

a. (15) Navedite ali izračunajte:

- Definicijsko območje.
- Asimptote.
- Intervale naraščanja ali padanja.
- $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ in $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)$.
- $\lim_{x\uparrow 0} f(x)$in $\lim_{x\uparrow 0} f'(x)$.
- Točke prevoja.

*Rešitev:*

- *Definicijsko območje je Razen točke $x = 0$ cela realna os.*
- *Asimptota je premica $y = \pi/4$.*
- *Odvajamo in dobimo*

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{1}{x^2} .$$

  *Odvod je v vseh točkah definicijskega območja negativen, torej je funkcija na $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$ padajoča.*
- $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \pi/2$.
- $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = 1$.
- $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\pi/2$.
- $\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = 1$.
- *Drugi odvod je*

$$f''(x) = \frac{4x + 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2} .$$

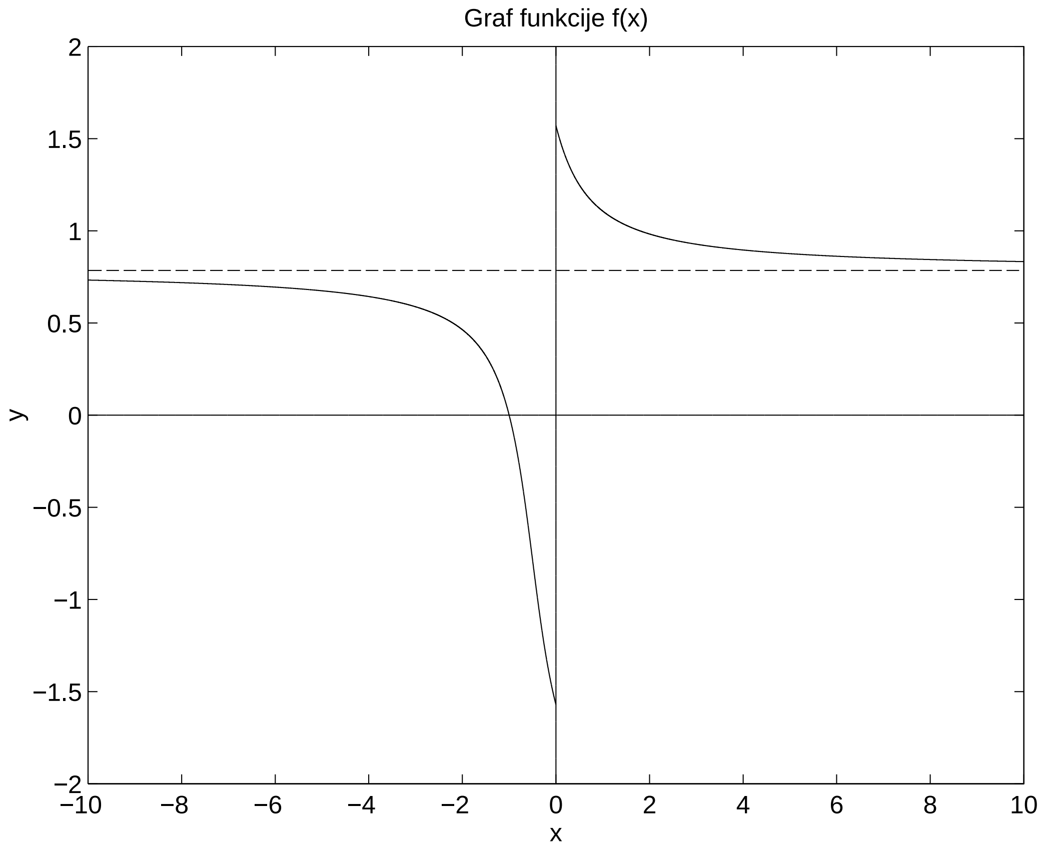
  *Prevoj je torej v točki $x = -1/2$.*

*Ocenjevanje:*

- *Definicijsko območje: 3 točki.*
- *Asimptote: 3 točki.*
- *Intervale naraščanja ali padanja: 3 točki.*
- *Prvi dve limiti: 2 točki.*
- *Drugi dve limiti: 2 točki.*
- *Točke prevoja: 2 točki.*

b. (10) Skicirajte graf funkcije $f$.

*Rešitev:*




*Ocenjevanje:*

- *Pravo padanje in naraščanje: 2 točki.*
- *Prava nezveznost: 2 točki.*
- *Prava asimptota: 2 točki.*
- *Prava ničla: 2 točki.*
- *Prav konkavnost, konveksnost: 2 točki.*

**2.** (25) Dana je potenčna vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k-1}k}\,.$$

a. (10) Ugotovite, za katere $x$ zgornja potenčna vrsta konverigira.

*Rešitev: Uporabimo kvocientni kriterij. Računamo*

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

*Vrsta torej konvergira za $|x| < 2$.*

*Ocenjevanje:*

- *Nastavek za kvocientni kriterij: 3 točke.*
- *Izračun limite: 3 točke.*
- *Radij konvergence: 4 točke.*

b. (15) Izračunajte vsoto neskončne vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}k}\,.$$

*Rešitev: Vemo, da je*

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$$

*in ta vrsta konverigira za $|x| < 1$. Vstavimo v vrsto $-x/4$ namesto $x$. Dobimo*

$$\log(1-\frac{x}{4}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{4^k k}\,.$$

*Ta zadnja vrsta konvergira za $|x| < 4$, zato lahko vstavimo $x = 1$ in dobimo*

$$-\log(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}k}\,.$$

*Rezultat:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}k} = -4\log(\frac{3}{4})\,.$$

*Ocenjevanje:*

- *Potenčna vrsta za $\log)1 = x)$: 3 točke.*
- *Ideja za $-x/4$: 6 točk.*
- *Preverjanje konvergence za $x = 1$: 3 točke.*
- *Razultat: 3 točke.*

**3.** (25) Funkcija $f$ je definirana z

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

je neskončnokrat zvezno odvedljiva na $(-1,1)$.

a. (15) Pokažite, da je Taylorjev polinom $n$-te stopnje za funkcijo $f$ v točki $x_0 = 0$ enak

$$T_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 4kx^k\,.$$

*Namig: Odvajajte* $(x-1)^2 \cdot f(x)$.

*Rešitev: Izračunati moramo* $f^{(k)}(0)$ *za vse* $k \geq 0$. *Za* $k \geq 3$ *dobimo po Leibnizovi formuli*

$$\Big(f(x)\cdot(x-1)^2\Big)^{(k)} = f^{(k)}(x)(x-1)^2 + 2kf^{(k-1)}(x)\cdot(x-1) + k(k-1)f^{(k-2)}(x) = 0\,.$$

*Izračunamo najprej* $f(0) = 1$, $f'(0) = 4$ *in* $f''(0) = 16$. *Vstavimo v rekurzivno formulo* $x = 0$ *in delimo z* $k!$. *Dobimo*

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \frac{2f^{(k-1)}}{(k-1)!} + \frac{f^{(k-2)}(0)}{(k-2)!} = 0\,.$$

*Če označimo koeficient pri* $x^k$ *v* $T_n(x)$ *z* $a_k$, *dobimo recimo*

$$a_3 - 2a_2 + a_1 = 0$$

*torej* $a_3 = 12$. *Podobno je* $a_4 - 2a_3 + a_2 = 0$ *ali* $a_4 = 16$. *Naprej je jasno. Odgovor:*

$$T_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 4kx^k\,.$$

*Ocenjevanje:*

- *Prvi trije členi: 5 točk.*
- *Ideja po Leibnizu: 5 točk.*
- *Rekurzivna formula: 3 točke. Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Z uporabo množenja potenčnih vrst izračunajte 3. odvod funkcije

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

v točki $x_0 = 0$.

*Namig: Uporabite a., tudi če vam formule ne uspe izpeljati.*

*Rešitev: Vemo, da je* $1/(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. *Koeficient pri* $x^3$ *v zmnožku potenčnih vrst je*

$$1 + 4 + 8 + 12 = 25\,.$$

*Tretji odvod je* $25 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 150$.

- *Množenje vrst: 5 točk.*
- *Odčitanje 3. odvoda: 5 točk.*

**4.** (25) Integracija per partes in integriranje racionalnih funkcij.

a. (10) Izračunajte
$$\int_1^e x\log^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

*Rešitev: Postavimo $f(x) = x$ in $G(x) = \log^2 x$. Z integracijo per partes integral preide v*

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\log^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\cdot\log^2 x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\log x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^2}{2} - \Big(\frac{x^2}{2}\log x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{x^2}{4}\Big|_1^e \\
&= \frac{1}{4}(e^2-1)
\end{aligned}$$

*Ocenjevanje:*

- *Prvo integriranje per partes: 3 točke.*
- *Drugo integriranje per partes: 3 točke.*
- *Rezultat: 4 točke.*

b. (15) Izračunajte
$$\int_{1/2}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+x+1)}\,.$$

*Rešitev: Integrand razbijemo na parcialne ulomke.*

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,.$$

*Enačbe za konstante $A$, $B$ in $C$ so*

$$\begin{array}{llll}
A & +B & & = 0 \\
A & & +C & = 0 \\
A & & & = 1
\end{array}$$

*Sledi $A = 1$, $B = -1$ in $C = -1$. Integriramo in dobimo*

$$
\begin{aligned}
\int_{1/2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+x+1)} &= \log(x)\Big|_{1/2}^{2} - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{2} \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\log(2) - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)\Big|_{1/2}^{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2(x+1/2)}{\sqrt{3}}\Big|_{1/2}^{2} \\
&= 2\log(2) + \frac{1}{2}(\log(\frac{7}{4}) - \log(7)) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\operatorname{arctg}(\frac{5}{\sqrt{3}}) - \operatorname{arctg}(\frac{2}{\sqrt{3}})) \\
&= +\log(2) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\operatorname{arctg}(\frac{5}{\sqrt{3}}) - \operatorname{arctg}(\frac{2}{\sqrt{3}}))
\end{aligned}
$$

*Ocenjevanje:*

- *Razcep na parcialne ulomke: 6 točk.*
- *Nedoločeni integral posameznih členov: 6 točk.*
- *Rezultat: 3 točke.*