FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

2. kolokvij

21. januar 2000

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkcija f naj bo dana s predpisom

$$f(x) = \operatorname{tgh}(\frac{1}{x}) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$

a. (15) Navedite ali izračunajte:

- Definicijsko območje.
- Asimptote.
- Intervale naraščanja ali padanja.
- $\lim_{x\to 0+} f(x)$ in $\lim_{x\to 0+} f'(x)$.
- $\lim_{x\to 0-} f(x)$in $\lim_{x\to 0-} f'(x)$.

Rešitev:

- *Definicijsko območje je razen točke $x = 0$ cela realna os.*
- *Asimptota je premica $y = 0$.*
- *Odvajamo in dobimo*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{4}{(e^{1/x} + e^{-1/x})^2}\,.$$

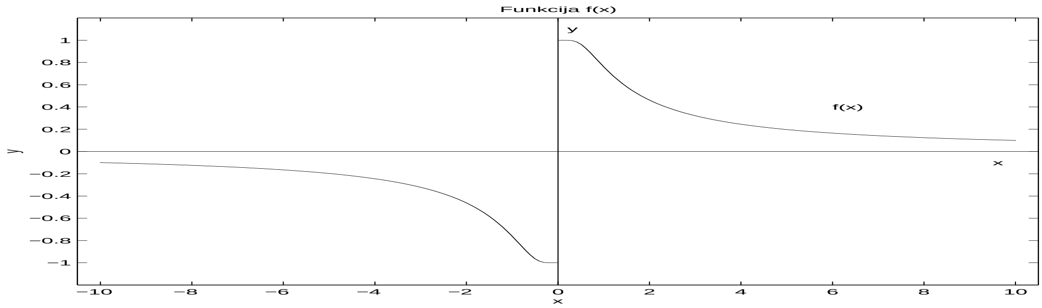
  Odvod je v vseh točkah definicijskega območja negativen, torej je funkcija na $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$ padajoča.
- $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$.
- $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0$.
- $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$.
- $\lim_{x\to 0-} f'(x) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Definicijsko območje: 3 točki.*
- *Asimptote: 3 točki.*
- *Intervale naraščanja ali padanja: 3 točki.*
- *Prvi dve limiti: 3 točke.*
- *Drugi dve limiti: 3 točke.*

b. (10) Skicirajte graf funkcije f.

Rešitev:



Ocenjevanje:

- *Pravo padanje in naraščanje: 4 točke.*
- *Prava nezveznost: 2 točki.*
- *Prava asimptota: 2 točki.*
- *Pravi naklon v* 0*: 2 točki.*

2. (25) Naj bo za $x > e^{-1}$ funkcija $f(x)$ definirana z

$$f(x) = x^x = e^{x \log x} .$$

a. (15) Naj bo $g(x)$ inverzna funkcija funkcije $f(x)$. Naj bo $a > e^{-1}$. Izračunajte

$$g'(a^a) .$$

Rešitev: Uporabimo formulo za odvod inverzne funkcije:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} .$$

V našem primeru je $g(a^a) = a$, zato

$$g'(a^a) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{a^a(\log a + 1)} .$$

Ocenjevanje:

- *Formula za odvod: 3 točke.*
- *Izračun $g(a^a)$: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje v formulo: 3 točke.*
- *Odvod f: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Pokažite, da je za $x > 0$ vedno $f''(x) > 0$.

Rešitev: Računamo

$$f'(x) = x^x(\log x + 1) .$$

Odvajamo še enkrat in uporabimo pravilo za odvod produkta. Dobimo

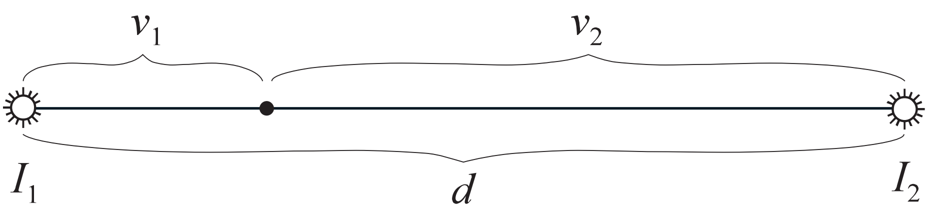
$$f''(x) = x^x(\log x + 1)^2 + x^{x-1} .$$

Drugi odvod je vsota dveh pozitivnih členov in zato pozitiven.

Ocenjevanje:

- *Prvi odvod: 2 točki.*
- *Pravilo za odvajanje produkta: 2 točki.*
- *Pravilo za odvajanje sestavljenih funkcij: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Sklep o pozitivnosti: 2 točki.*

3. (20) Dana sta dva izvora svetlobe jakosti I_1 in I_2 na razdalji d.



Sl. 1 Izvora svetlobe na razdalji d.

a. (15) Osvetljenost točke kjerkoli na daljici, ki povezuje izvora svetlobe je enaka $L_1 + L_2$, kjer je

$$L_1 = \frac{kI_1}{v_1^2} \qquad \text{in} \qquad L_2 = \frac{kI_2}{v_2^2}\,.$$

Tukaj je k neka fizikalna konstanta, v_1 je oddaljenost od izvora 1 in v_2 oddaljenost od izvora 2. Kje na daljici, ki povezuje izvora, je osvetljenost točke najbrž najmanjša?

Rešitev: Označimo z v razdaljo od prvega izvora. Na tej razdalji je osvetljenost enaka

$$f(v) = \frac{kI_1}{v^2} + \frac{kI_2}{(d-v)^2}\,.$$

Poiščemo stacionarne točke. Najprej odvajamo.

$$f'(v) = -\frac{2kI_1}{v^3} + \frac{2kI_2}{(d-v)^3}\,.$$

Izenačimo z 0 *in izračunamo*

$$\frac{v^3}{(d-v)^3} = \frac{I_1}{I_2}$$

ali

$$\frac{v}{d-v} = \sqrt[3]{\frac{I_1}{I_2}}\,.$$

Izračunamo

$$v = \frac{d\sqrt[3]{I_1/I_2}}{1+\sqrt[3]{I_1/I_2}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Funkcija $f(v)$: 3 točke.*
- *Ideja z odvajanjem: 3 točke.*
- *Pravilni odvod: 3 točke.*
- *Izenačenje z* 0*: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Pokažite, da ste v a. res našli minimum.

Rešitev: Izračunamo

$$f''(v) = \frac{6kI_1}{v^4} + \frac{6kI_2}{(d-v)^4}\,.$$

Drugi odvod je povsod pozitiven, zato je funkcija konveksna na intervalu $[0, d]$. *Stacionarna točka iz a. je res minimum.*

Ocenjevanje:

- *Drugi odvod: 4 točke.*
- *Opažanje, da je drugi odvod pozitiven: 2 točki.*
- *Sklep na podlagi konveksnosti: 4 točki.*

4. (25) Naj bo funkcija f na $(-1,1)$ dana z

$$f(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) .$$

a. (10) Izračunajte n-ti odvod funkcije f v poljubni točki x za $n \geq 1$.

Rešitev: Zapišimo

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\log(1+x) - \log(1-x)\right) .$$

Odvajamo vsak člen posebej in dobimo

$$(\log(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

in

$$(\log(1-x))^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} .$$

Združimo in dobimo

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-x)^n}\right) .$$

Ocenjevanje:

- *Razčlenitev: 2 točki.*
- *Odvajanje prvega člena: 2 točki.*
- *Odvajanje drugega člena: 2 točki.*
- *Združevanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Zapišite Taylorjevo vrsto za funkcijo f v točki $x_0 = 0$ in izračunajte radij konvergence dobljene vrste. Utemeljite, da je za $x \in (-1,1)$ funkcija f enaka svoji Taylorjevi vrsti.

Namig: Kot znano upoštevajte, da je $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^k/k$ *za* $x \in (-1,1)$.

Rešitev: Iz a. razberemo, da je $f^{(n)}(0) = 0$ *za vse sode* n. *Za lih* $n = 2k+1$ *dobimo*

$$f^{(n)}(0) = (2k)!\,.$$

Opazimo še $f(0) = 0$ *in lahko zapišemo Taylorjevo vrsto kot*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} .$$

Radij konvergence dobimo po kvocientnem kriteriju kot

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k+1}{2k+3}\right| = 1\,.$$

Dokazati moramo še, da je Taylorjeva vrsta enaka funkciji za $x \in (-1, 1)$. *Vrsta je vsota vrst za* $\log(1+x)$ *in* $\log(1-x)$. *Ker ti vrsti konvergirata in predstavljata funkciji, iz katerih sta izpeljani, konvergira tudi vsota vrst proti vsoti funkcij.*

Ocenjevanje:

- *Višji odvodi v* 0*: 3 točke.*
- *Zapis Taylorjeve vrste: 3 točke.*
- *Radij konvergence: 3 točke.*
- *Formula za ostanek: 3 točke.*
- *Dokaz, tak ali drugačen za konvergenco proti* $f(x)$*: 3 točke.*