

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

2. kolokvij

16. januar 2004

Ime in priimek: _____ Vpisna št:

--	--	--	--	--	--	--	--

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkcija f naj bo dana s predpisom

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

a. (15) Navedite ali izračunajte:

1. Definijsko območje.
2. Intervale naraščanja na intervalu $[0, 2\pi]$.
3. Intervale padanja na intervalu $[0, 2\pi]$.
4. Stacionarne točke.
5. Maksimume in minimume funkcije.

b. (10) Skicirajte graf funkcije f .

2. (25) Naj bo k konstanta, za katero je $|k| < 1$. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo odvedljiva na \mathbb{R} in naj velja $f(0) = 0$ in

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}.$$

Naj bo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inverzna funkcija funkcije f .

a. (10) Pokažite, da velja

$$g'(y) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(g(y))}.$$

b. (15) Naj bo funkcija $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana s $h(y) = \sin(g(y))$. Izrazite $h''(y)$ z $g(y)$.

3. (25) L'Hospitalovo pravilo:

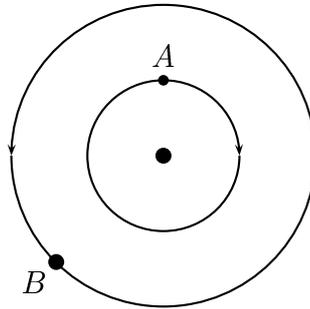
a. (10) Za poljuben $a \neq 0$ izračunajte limito

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x^a - 1}.$$

b. (15) Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right).$$

4. (25) Planeta A in B se gibljeta okrog svoje zvezde po krožnicah polmerov a in b , kjer je $a < b$, kot na sliki 1. Planet A se giblje v smeri urinega kazalca s kotno hitrostjo ω_1 , planet B pa v smeri nasprotni urinemu kazalcu s kotno hitrostjo ω_2 . V času $t = 0$ je planet A v točki $(a, 0)$, planet B pa v točki $(-b, 0)$.



Slika 1 Potovanje planetov A in B

V času t je razdalja med planetoma enaka

$$d(t) = \sqrt{(a \cos(\omega_1 t) + b \cos(\omega_2 t))^2 + (-a \sin(\omega_1 t) - b \sin(\omega_2 t))^2}.$$

Privzemite, da je $\omega_1 \neq \omega_2$.

- a. (15) Poiščite stacionarne točke funkcije $d(t)$ in ugotovite, ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

Namig: Glejte raje $d^2(t)$ in si najprej funkcijo poenostavite.

- b. (10) Izračunajte najmanjšo in največjo razdaljo med planetoma. Utemeljite, da ste našli največjo, oziroma najmanjšo razdaljo.

