

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

2. kolokvij

16. januar 2004

Ime in priimek: _____

Vpisna št:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkcija f naj bo dana s predpisom

$$f(x) = \sin x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x},$$

pri čemer je $0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

a. (15) Navedite ali izračunajte:

1. Definicjsko območje.
2. Periodo.
3. Intervale naraščanja ali padanja.
4. Lokalne maksimume funkcije.
5. Lokalne minimume funkcije.

b. (10) Skicirajte graf funkcije f .

2. (25) Definirajte za vsak $n \geq 0$ na intervalu $(-1, 1)$ funkcije

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

a. (10) Pokažite, da za vsak $n \geq 0$ velja

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

b. (10) Pokažite, da so za vsak $n > 1$ točke $x_k = \cos(k\pi/n)$ za $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ stacionarne za $T_n(x)$ in ugotovite, ali so lokalni maksimumi ali lokalni minimumi.

3. (25) L'Hospitalovo pravilo.

a. (10) Izračunajte limiti

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \text{in} \quad \lim_{x \downarrow 0} x \log x .$$

b. (15) Izračunajte limito

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)^x .$$

Namig: Preverite, da velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\log x + \log \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) \right) .$$

Upoštevajte limitte iz a.

4. (25) Pri izračunu energije pospešenega relativističnega delca se pojavi funkcija

$$P(\phi) = \frac{\sin^2 \phi}{(1 - \beta \cos \phi)^5},$$

kjer je $0 < \beta < 1$ konstanta.

a. (15) Poiščite vse stacionarne točke funkcije $P(\phi)$.

b. (10) Pokažite, da je $\phi = 0$ lokalni minimum.

Namig: Pomislite, preden dvakrat odvajate.

