FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

2. kolokvij

1. marec 2002

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkcija f naj bo dana s predpisom

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

a. (15) Navedite ali izračunajte:

1. Definicijsko območje.
2. Intervale naraščanja ali padanja.
3. Maksimum in minimum funkcije.
4. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$.
5. Intervale konveksnosti ali konkavnosti funkcije.

Rešitev:

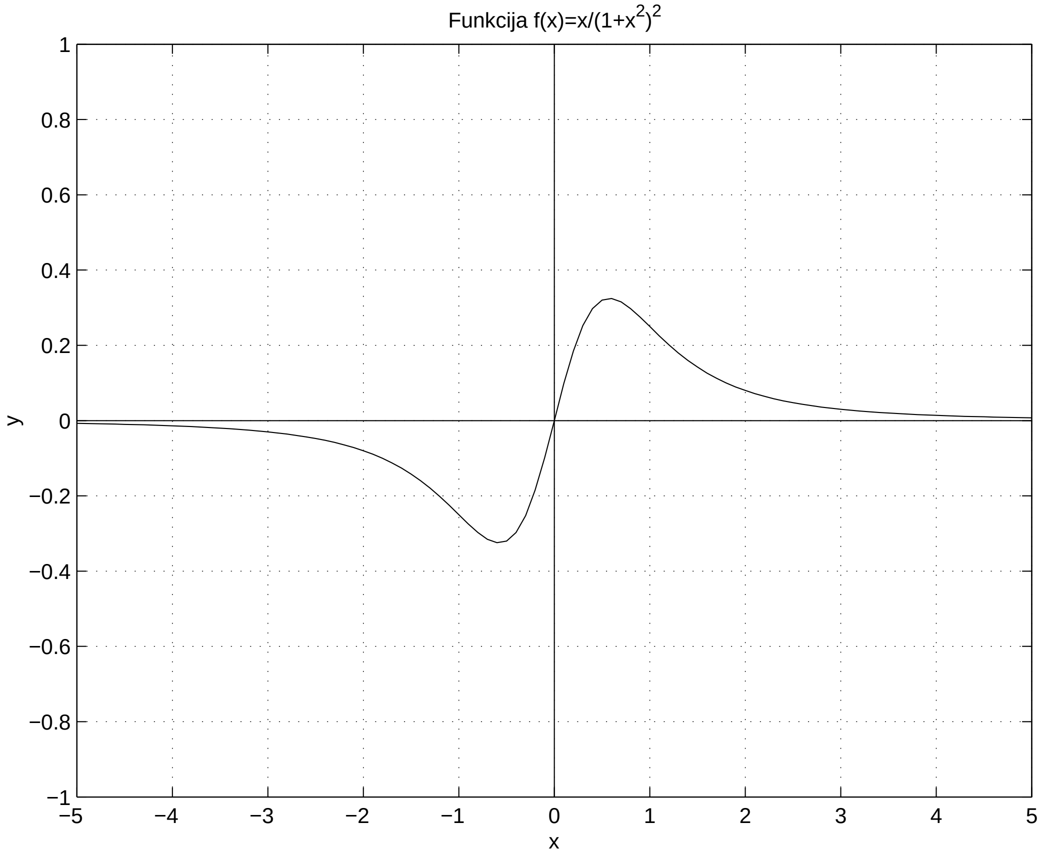
1. *Definicijsko območje je cela realna os.*
2. *Odvajamo in dobimo*
$$f'(x) = \frac{1-3\,x^2}{(1+x^2)^3}\,.$$
Na intervalu $(-\infty, -\sqrt{1/3})$ *je funkcija padajoča. Na* $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ *je funkcija naraščajoča, na intervalu* $(\sqrt{1/3}, \infty)$ *pa je funkcija spet padajoča.*
3. *Maksimum je točka* $x = \sqrt{1/3}$, *minimum pa točka* $-\sqrt{1/3}$.
4. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.
5. *Izračunamo*
$$f''(x) = \frac{12\,x\,(-1+x^2)}{(1+x^2)^4}\,.$$
Na intervalih $(-1,0)$ *in* $(1,\infty)$ *je* $f''(x) > 0$, *torej je tam funkcija konveksna, sicer pa je konkavna.*

Ocenjevanje:

- *Definicijsko območje: 3 točki.*
- *Asimptote: 3 točki.*
- *Intervale naraščanja ali padanja: 3 točki.*
- *Prvi dve limiti: 3 točke.*
- *Drugi dve limiti: 3 točke.*

b. (10) Skicirajte graf funkcije f.

Rešitev:



Ocenjevanje:

- *Pravo padanje in naraščanje: 2 točki.*
- *Prava konveksnost ali konkavnost: 2 točki.*
- *Prava ničla: 2 točki.*
- *Prava asimptota: 2 točki.*
- *Pravi naklon v 0: 2 točki.*

2. (25) Funkcija $f\colon [0,\infty)$ naj bo na svojem definicijskem območju strogo naraščajoča in naj velja $f(0)=0$ in

$$f'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}\,.$$

a. (15) Naj bo $g(x)$ inverzna funkcija funkcije $f(x)$. Pokažite, da velja

$$g'(y) = 1 + y^2$$

za vsak y v zalogi vrednosti funkcije $f(x)$.

Rešitev: Po formuli za odvod inverzne funkcije je

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1+[f(g(y))]^2}} \\ &= 1+y^2\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za odvod inverzne funkcije: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje: 3 točke.*
- *Ideja, da uporabimo izraz za odvod: 3 točke.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Sklep: 3 točke.*

b. (10) Za funkcijo $f(x)$ je $f(12)=3$. Izračunajte

$$f^{(3)}(12)\,.$$

Namig: Odvajajte enakost

$$f'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}\,.$$

Rešitev: Najprej iz enakosti

$$f'(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$$

sledi, da je $f'(12)=1/10$. Odvajamo enakost po x. Dobimo

$$f''(x) = -\frac{2f(x)f'(x)}{(1+[f(x)]^2)^2}\,.$$

Vstavimo $x = 12$. *Sledi*

$$f''(12) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{10}}{(1+3^2)^2} = -\frac{6}{1000}\,.$$

Odvajamo še enkrat.

$$f^{(3)}(x) = \frac{-2\,\left(\left(1 - 3\,f(x)^2\right)\,f'(x)^2 + f(x)\,\left(1 + f(x)^2\right)\,f''(x)\right)}{\left(1 + f(x)^2\right)^3}\,.$$

Vstavimo $x = 12$. *Dobimo*

$$f^{(3)}(12) = \frac{11}{12500}\,.$$

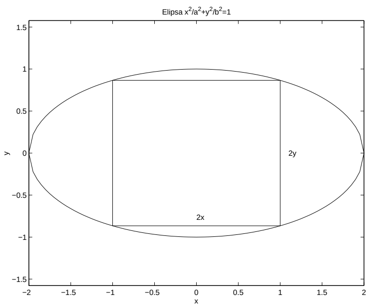
Ocenjevanje:

- *Prvi odvod: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Tretji odvod: 2 točki.*

3. (20) V elipso dano z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

včrtamo prakovotnik, tako da so njegove stranice vzporedne s koordinatnima osema kot na sliki 1. Dolžini stranic označimo z $2x$ in $2y$.



Slika 1 Elipsa z včrtanim pravokotnikom.

a. (15) Poiščite dolžine stranic, za katere je ploščina pravokotnika lahko največja možna.

Rešitev: Zaradi simetrije lahko gledamo le del pravokotnika v prvem kvadrantu. Ploščina tega dela je $P = xy$. Ker mora biti točka (x, y) na elipsi, je

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,,$$

torej ploščina enaka

$$P(x, y) = bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,.$$

Odvajajmo desno stran po x in jo izenačimo z 0. Dobimo

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{bx^2}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = 0\,.$$

Sledi

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0\,.$$

Sledi

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula za ploščino: 2 točki.*
- *Funkcijska odvisnost y: 2 točki.*
- *Odvod: 2 točki.*
- *Ničla odvoda: 2 točki.*
- *Dolžine stranic: 2 točki.*

b. (10) Utemeljite, da ste v a. res našli maksimum.

Rešitev: Funkcija $x \mapsto bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ *je na intervalu* $[0,a]$ *zvezna, nenegativna in v krajiščih intervala enaka* 0. *Taka funkcija gotovo ima maksimum, v katerem je odvod enak* 0. *Edini* x *je torej res maksimum. Pripadajoči* y *je enak* $y = b/\sqrt{2}$. *Največja možna ploščina je torej*

$$P = 2ab\,.$$

Ocenjevanje:

- *Vrednost v levem krajišču: 2 točki.*
- *Vrednost v desnem krajišču: 2 točki.*
- *Nenegativnost: 2 točki.*
- *Edini* x *z odvodom enakim* 0*: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

4. (25) Naj bo
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}\,.$$

a. (15) Označite
$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$
Pokažite, da velja
$$a_k - a_{k-1} + a_{k-2} = 0$$
in izračunajte po vrsti a_k.

Namig: Množenje in Leibnizovo pravilo.

Rešitev: Zapišemo lahko
$$f(x)(x^2 - x + 1) = 1\,.$$
Levo in desno stran odvajajmo k-krat, pri čemer na levi uporabimo Leibnizovo pravilo. Dobimo
$$f^{(k)}(x)(x^2 - x + 1) + kf^{(k-1)}(x)(2x-1) + \frac{k(k-1)}{2}f^{(k-2)}(x)\cdot 2 = 0\,.$$
Vstavimo $x = 0$ in dobimo
$$f^{(k)}(0) - kf^{(k-1)}(0) + k(k-1)f^{(k-2)}(x) = 0\,.$$
Enačbo delimo še z $k!$ in zahtevana enačba sledi. Ugotovimo $a_0 = 1$ in $a_1 = 1$. Z uporabo rekkurzivne formule sledi $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = -1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = 1$, ...

Ocenjevanje:

- *Ideja z množenjem: 3 točke.*
- *Leibniz: 3 točke.*
- *Pravilna uporaba Leibnizovega pravila in pravilno vstavljanje: 3 točke.*
- *Rekurzivna formula: 3 točke.*
- *a_k: 3 točke.*

b. (10) Ostanek v Taylorjevi formuli lahko izrazimo s formulo
$$R_n(x) = \frac{2\sqrt{3}x^{n+1}}{3}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi(n+2)}{3}\right) - x\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)}{x^2 - x + 1}\,.$$
Sklepajte, da za $|x| < 1$ velja
$$f(x) = 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + \cdots\,.$$
Izračunajte še 20. odvod funkcije $f(x)$ v točki $x = 0$.

Rešitev: Vse kar moramo pokazti je to, da je

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

za vsak $|x| < 1$. *Ker v formuli nastopa potenca* x^{n+1} *in za* $|x| < 1$ *velja* $x^{n+1} \to 0$, *ko* $n \to \infty$, *sledi* $R_n(x) \to 0$. *Taylorjeva vrsta za* $|x| < 1$ *konvergira proti* $f(x)$.

Iz a. razberemo, da je $f^{(20)}(0) = 20! \cdot a_{20}$. *Ker je* $a_{20} = 0$, *je tudi iskani odvod enak* 0.

Ocenjevanje:

- *Kaj storiti?: 2 točki.*
- *Opažanje, da* $R_n(x) \to 0$*: 2 točki.*
- *Sklep o Taylorjevi vrsti: 2 točki.*
- *Zveza med koeficienti in odvodom: 2 točki.*
- *Prebiranje odvoda: 2 točki.*