FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika II

1. kolokvij

4. april, 1996

Ime in priimek: ________________________________ ***Letnik:*** ____________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 90 min.

Zavedajte se, da je za upoštevanje kolokvijev potrebno nabrati na 1. in 2. kolokviju skupaj vsaj 40 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1			
2			
3			
4			
5			
Skupaj			

1. (20) Izlimitirani integrali:

a. (10) Kot znano privzemite, da za vsak $a > 0$ velja

$$\int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Pokažite, da je tudi

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Namig: Integrirajte per partes.

Pri integraciji per partes postavimo $F(t) = \sin^2(t)$ *in* $g(t) = 1/t^2$. *Dobimo*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt &= \frac{-\sin^2(t)}{t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sin(t)\cos(t)}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(2t)}{t} = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Zadnji enačaj seveda sledi iz prve formule v nalogi, če postavimo $a = 2$.

b. (10) Dokažite, da za $n > 2$ velja

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2} dx = \frac{(n-1)}{2} \int_{-\infty}^\infty x^{n-2} e^{-x^2} dx\,.$$

Iz tega izpeljite, da je za sode n

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2} dx = \frac{(n-1)}{2}\frac{(n-3)}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

Namig: Integrirajte per partes. Upoštevajte, da je $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Postavite $f(x) = x^{n-2}$ *in* $G(x) = e^{-x^2}$ *v integralu na desni. Dobite*

$$\int_{-\infty}^\infty x^{n-2} e^{-x^2} dx = \frac{1}{n-1} x^{n-1} e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^\infty + \frac{2}{n-1}\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2} dx\,.$$

Množite obe strani z $(n-1)/2$.

Druga formula v nalogi sledi z večkratno uporabo prve. Za sode n *pridemo po* $n/2-1$ *korakih do dane formule.*

2. (20) Parametrična krivulja naj bo dana z

$$x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \qquad \text{in} \qquad y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$$

za $0 \leq t \leq 2\pi$.

a. (10) Izračunajte celotno dolžino dane krivulje.
Namig: Upoštevajte, da je $\cos(t)\cos(2t) + \sin(t)\sin(2t) = \cos(t) = 2\cos^2(t/2) - 1$.

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(-\sin t + \sin(2t))^2 + 4(\cos t - \cos(2t))^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 4(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) - 8(\cos(2t)\cos t + \sin(2t)\sin t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{8 - 8(2\cos^2(t/2) - 1)}\, dt \qquad \textit{Namig!} \\
&= 4\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos^2(t/2)}\, dt \\
&= 4\int_0^{2\pi} |\sin(t/2)| dt \\
&= 8\int_0^{\pi} \sin(t/2) dt \\
&= 16(-\cos(t/2))\Big|_0^{\pi} = 16\,.
\end{aligned}$$

b. (10) Izračunajte ploščino lika, ki ga krivulja objame.
Namig: Za $m \neq n$ *je* $\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = 0$ *in* $\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(mx)dx = \pi$ *za vsak* $m \geq 1$.

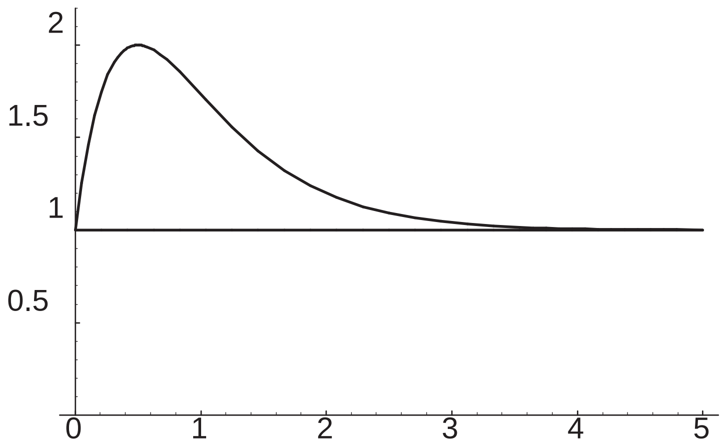
$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} \dot{x}y\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin(t) + 2\sin(2t))(2\sin(t) - \sin(2t))\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t - 4\sin^2(2t))\; dt \\
&= -8\pi \qquad \textit{Namig!}\,.
\end{aligned}$$

Ploščina je negativna, ker krivuljo pretečemo v smeri nasprotni urinemu kazalcu, ko teče t on 0 do 2π.

3. (20) Naj bo dana funkcija $f(x) = 2xe^{-2x+1} + 1$.

a. (10) Skicirajte graf funkcije f na intervalu $[0, \infty)$.

Izračunamo $f'(x) = 2e^{-2x+1}(1 - 2x)$, *torej je maksimum funkcije* f *na* $[0, \infty)$ *pri* $x = 1/2$. *Poleg tega je* $f(0) = 1$ *in* $\lim_{\to\infty} f(x) = 1$.



b. (10) Izračunajte prostornino rotacijskega telesa, ki ga dobite, če zavrtite graf funkcije f okrog asimptote na $[0, \infty)$.

Asimptota je očitno premica $y = 1$. *Rotacijsko telo, ki ga dobimo, je točno tako, kot ga dobimo, če zavrtimo funkcijo* $2xe^{-2x+1}$ *okrog* x*–osi. Po formuli za prostornino rotacijskega telesa je*

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^\infty 4x^2 e^{-4x+2}\, dx \\
&= 4\pi e^2 \int_0^\infty x^2 e^{-4x}\, dx && \textit{nova spremenljivka } 4x = t \\
&= \frac{1}{16}\pi e^2 \int_0^\infty t^2 e^{-t}\, dx && \textit{integriramo per partes} \\
&= \frac{1}{8}\pi e^2 .
\end{aligned}
$$

4. (20) Naj bosta dana vektorja

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Po formuli je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Psevdo–skalarni produkt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *je enak kvadratu norme* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, *torej 81.*

b. (10) Poiščite vektor $\mathbf{c}$ dolžine $2\sqrt{2}$, ki je pravokoten na $\mathbf{a}$, oklepa s vektorjem $\mathbf{b}$ kot $\pi/6$ in zadošča pogoju $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$.

Namig: $\mathbf{c}$ *je linearna kombinacija* $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Po namigu je

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{b} + \mu (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Ker je kot med $\mathbf{c}$ *in* $\mathbf{b}$ *enak* $\pi/6$, *mora biti skalarni produkt*

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= |\mathbf{c}||\mathbf{b}| \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{6} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6 \\ &= (\lambda \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 6\lambda. \end{aligned}$$

Torej je $\lambda = 1$. *Po drugi strani mora biti*

$$|\mathbf{c}|^2 = \lambda^2 |\mathbf{b}|^2 + \mu^2 |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2,$$

torej

$$8 = 6 + 18\mu^2$$

ali $\mu = \pm \frac{1}{3}$. *Ker je* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mu \mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0$, *je torej* $\mu |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0$, *torej* $\mu > 0$. *Vektor* $\mathbf{c}$ *je enak*

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. (20) Naj bodo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ poljubni med seboj linearno neodvisni vektorji.

a. (10) Pokažite, da so vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ med seboj linearno **odvisni**.

Namig: Lahko uporabite Lagrangeovo identiteto.

Ena od možnosti je ta, da pokažemo $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = 0$. *Ta zadnji izraz je po Lagrangeovi identiteti enak*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \,.$$

Zaradi ortogonalnosti je $(\mathbf{a}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$ *in* $(\mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$, *torej je zgornji psevdo–skalarni produkt enak 0.*

b. (10) Predpostavite, da sta vektorja $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ ortogonalna. Izračunajte ortogonalno projekcijo vektorja $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ na vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Namig: Uporabite Lagrangeovo identiteto.

Po formuli za ortogonalno projekcijo je

$$pr_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c})}{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})} \,.$$

Skalarni produkt lahko pretvorimo po Lagrangeovi formuli. Dobimo

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b})(\mathbf{c}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \,.$$

Zaradi ortogonalnosti je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ *in* $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, *torej je projekcija enaka* $\mathbf{0}$.