FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

3. kolokvij

14. april 2000

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Integriranje per partes:

a. (15) Izračunajte integral

$$\int_0^b \log(x + \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Postavimo $f(x) = 1$ in $G(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ in integriramo per partes. Označimo iskani integral z I. Računamo

$$\begin{aligned} I &= x \cdot \log(x + \sqrt{1+x^2})\Big|_0^b - \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= b \cdot \log(b + \sqrt{1+b^2}) - \sqrt{1+x^2}\Big|_0^b \\ &= b \cdot \log(b + \sqrt{1+b^2}) + 1 - \sqrt{1+b^2} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 3 točke.*
- *Vstavljanje mej v prvi integral: 3 točke.*
- *Drugo integriranje: 3 točke.*
- *Vstavljanje mej drugič: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Označite za $m \geq 0$ in $\lambda > 0$

$$I_{m,\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cdot (1 - e^{-x})^m\,\mathrm{d}x\,.$$

Pokažite, da je za $m \geq 1$

$$I_{m,\lambda} = \frac{m}{\lambda} \cdot I_{m-1,\lambda+1}\,.$$

Sklepajte, da je

$$I_{m,\lambda} = \frac{m!}{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+m)}\,.$$

Rešitev: Integriramo per partes in dobimo

$$\begin{aligned} I_{m,\lambda} &= -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}(1 - e^{-x})^m\Big|_0^\infty + \frac{m}{\lambda}\int_0^\infty e^{-(\lambda+1)x}(1 - e^{-x})^{m-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m}{\lambda} \cdot I_{m-1,\lambda+1}\,. \end{aligned}$$

Za izračun $I_{m,\lambda}$ *lahko zdaj uporabimo rekurzivno formulo in dobimo*

$$\begin{aligned} I_{m,\lambda} &= \frac{m}{\lambda} I_{m-1,\lambda+1} \\ &= \frac{m}{\lambda} \cdot \frac{(m-1)}{(\lambda+1)} \cdot I_{m-2,\lambda+2} \\ &= \cdots\cdots\cdot \\ &= \frac{m}{\lambda} \cdot \frac{(m-1)}{(\lambda+1)} \cdots \frac{1}{\lambda+m-1} \cdot I_{0,\lambda+m} \\ &= \frac{m!}{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+m-1)(\lambda+m)} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Per partes: 3 točke.*
- *Izlimitiranost: 3 točke.*
- *Smiselna uporaba rekurzije: 2 točki.*
- *Rezultat za* I_4*: 2 točki.*

2. (25) Uvedba nove spremenljivke, racionalne funkcije.

a. (15) Izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}\,.$$

Rešitev: Gre za racionalno funkcijo, ki jo moramo razstaviti na parcialne ulomke. Računamo

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\,.$$

Množino obe strani z $(x+1)(x^2+1)$ *in izenačimo potence. Dobimo*

$$1 = A(x^2+1) + (x+1)(Bx+C)\,,$$

torej

$$A+B=0, \qquad B+C=0 \qquad \textit{in} \qquad A+C=1\,.$$

Sledi najprej $A=C$ *in* $A=C=1/2$, *ter* $B=-1/2$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log(1+b) - \frac{1}{4}\log(1+b^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+b}{\sqrt{1+b^2}}\Big) + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za parcialne ulomke: 3 točke.*
- *Koeficienti: 3 točke.*
- *Prvi integral: 3 točke.*
- *Drugi integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Namig: Uporabite $\mathrm{tgh}(u/2) = (\sqrt{1+\sinh^2 u} - 1)/\sinh u$.

Rešitev: Možnosti je več. Uvedimo novo spremenljivko $x = \sinh u$. *Velja*

$$\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\cdot \mathrm{d}u\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} &= \int_{\mathrm{arcsinh}(1)}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sinh u} \\
&= \log(\mathrm{tgh}(\frac{u}{2}))\Big|_{\mathrm{arcsinh}(1)}^\infty \\
&= -\log(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenjivka: 2 točki.*
- *Uvedba nove spremenljivke: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Dana je diferencialna enačba drugega reda oblike

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = f(x)\,.$$

a. (10) Poiščite dve linearno neodvisni rešitvi enačbe, če je $f(x) = 0$.

Rešitev: Najprej rešimo pripadajočo karakteristično enačbo $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Ta enačba ima kompleksna korena

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textit{in} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Vemo, da sta rešitvi v tem primeru

$$y_1(t) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right) \qquad \textit{in} \qquad y_2(t) = e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right).$$

Ocenjevanje:

- *Karakterisitična enačba: 2 točki.*
- *Rešitvi: 2 točki.*
- *Eksponentni del rešitev: 2 točki.*
- *Kosinus: 2 točki.*
- *Sinus: 2 točki.*

b. (15) Rešite enačbo

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = e^t$$

pri začetnih pogojih $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

Rešitev: Poiskati moramo partikularno rešitev zgornje diferencialne enačbe. Ker $\mu = 1$ ni rešitev karakteristične enačbe, iščemo rešitev z nastavkom $y_p(t) = Ae^t$. Odvajamo in dobimo, da mora veljati

$$3Ae^t = e^t\,.$$

Sledi $A = 1/3$. Partikularna rešitev je

$$y_p(t) = \frac{1}{3}e^t\,.$$

Rešitev, ki ustreza začetnim pogojem iščemo z nastavkom

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\,.$$

Konstanti c_1 in c_2 določimo iz začetnih pogojev. Dobimo enačbi

$$0 = \frac{1}{3} + c_1 \qquad \textit{in} \qquad 0 = \frac{1}{3} - c_1/2 + c_2\sqrt{3}/2\,.$$

Sledi $c_1 = -1/3$ in $c_2 = -1/(\sqrt{3}\,3)$. Končna rešitev je

$$y(t) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}y_1(t) - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2(t)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za partikularno rešitev: 3 točke.*
- *Odvodi: 3 točke.*
- *Konstante: 3 točke.*
- *Nastavek za splošno rešitev: 3 točke.*
- *Enačbi za konstante: 3 točke.*

4. (20) Hitrost padajočega telesa v zraku opisuje diferencialna enačba

$$m\dot{v} = mg - rv^2\,,$$

kjer je r neka pozitivna konstanta.

a. (15) Poiščite rešitev enačbe pri začetnem pogoju $v(0) = 0$.

Rešitev: Enačba ima ločljivi spremenljivki. Zapišemo

$$\frac{m\dot{v}}{mg - rv^2} = 1\,.$$

Integrirati moramo izraz

$$\begin{aligned}\int \frac{m\mathrm{d}v}{mg - rv^2} &= \int \left[\frac{m}{2(mg + \sqrt{mgr}v)} + \frac{m}{2(mg - \sqrt{mgr}v)}\right] \mathrm{d}v \\ &= \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{gr}} \log(\frac{mg + \sqrt{mgr}v}{mg - \sqrt{mgr}v})\end{aligned}$$

označimo $\kappa = \sqrt{m/gr}$. *Rešitev diferencialne enačbe dobimo kot*

$$\frac{\kappa}{2} \log(\frac{\kappa g + v}{\kappa g - v}) = t + c$$

za neko konstanto c. *Konstanto* c *določimo iz začetnega pogoja. Veljati mora* $v(0) = 0$, *iz česar sledi* $c = 0$. *Sledi*

$$\frac{\kappa g + v}{\kappa g - v} = e^{2t/\kappa}$$

in

$$v(t) = g\kappa \frac{1 - e^{-2t/\kappa}}{1 + e^{-2t/\kappa}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je enačba z ločljivima spremenljivkama: 3 točke.*
- *Nastavek: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Določitev konstante: 3 točke.*
- *Končna rešitev: 3 točke.*

b. (10) Recimo, da padajoče telo še pospešuje s konstantno silo f, tako da velja enačba

$$m\dot{v} = mg + f - rv^2\,.$$

Poiščite rešitev te diferencialne enačbe pri začetnem pogoju $v(0) = 0$.

Rešitev: Enačba je enaka kot v a., le g *moramo povsod nadomestiti z* $g + f/m$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za isto enačbo: 5 točk.*
- *Rešitev: 5 točk.*