FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

3. kolokvij

12. april 2002

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (20) Integriranje per partes:

a. (15) Označite

$$I_n = \int_0^1 x \log^n x \, \mathrm{d}x \, .$$

Pokažite, da je

$$I_n = -\frac{n}{2} I_{n-1} \, .$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x \log^n x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \log^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{2} \int_0^1 x^2 \log^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{n}{2} \int_0^1 x \log^{n-1} x \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{n}{2} I_{n-1} \, . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izbira G: 3 točke.*
- *Izbira f: 3 točke.*
- *Integriranje f: 3 točke.*
- *Vstavljanje mej: 3 točke.*
- *Končna rekurzija: 3 točke.*

b. (10) Pokažite, da je

$$I_n = \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}} \, .$$

Rešitev: Uporabimo rezultat iz a. Računamo

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{n}{2} I_{n-1} \\ &= \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot I_{n-2} \\ &= \cdots\cdots\cdots \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= (-1)^n \frac{n!}{2^n} \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}} \, . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z a.: 2 točki.*
- *Prvi korak rekurzije: 2 točki.*
- *Predznaki: 2 točki.*
- *Zadnji korak rekurzije: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (25) Integriranje racionalnih funkcij, uvedba nove spremenljivke.

a. (15) Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)},$$

kjer je $a > b > 0$.

Rešitev: Gre za racionalno funkcijo, ki jo moramo najprej razcepiti na parcialne ulomke z nastavkom

$$\frac{1}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \frac{Ax+B}{a^2+x^2} + \frac{Cx+D}{b^2+x^2}.$$

Zmnožimo in dobimo

$$1 = (Ax+B)(b^2+x^2) + (Cx+D)(a^2+x^2).$$

Izenačimo koeficiente in dobimo enačbe

$$\begin{aligned} 1 &= b^2B + a^2D \\ 0 &+ b^2A + a^2C \\ 0 &= B + D \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

Ker je $a > b > 0$ iz druge in četrte enačbe sledi $A = C = 0$. Iz prve in tretje dobimo $B = -1/(a^2-b^2)$ in $D = 1/(a^2-b^2)$. Sledi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} &= \frac{1}{a^2-b^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{b^2+x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}(\frac{x}{b}) - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{\pi}{b} - \frac{\pi}{a}\right) \\ &= \frac{\pi}{ab(a+b)}. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za parcialne ulomke: 3 točke.*
- *Enačbe za koeficiente: 3 točke.*
- *Koeficienti: 3 točke.*
- *Nedoločena integrala: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}\,.$$

Rešitev: Uvedimo standardno novo spremenljivko $\operatorname{tg}(x/2) = u$. *Vemo, da je*

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \qquad \textit{in} \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}\\
&\quad= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+2u+u^2}\\
&\quad= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+u)^2}\\
&\quad= -\frac{2}{1+u}\Big|_0^1\\
&\quad= 2-1\\
&\quad= 1\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Standardna nova spremenljivka: 2 točki.*
- $\mathrm{d}u$*: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral racionalne funkcije: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' + 2y' + 5y = 4\,e^{-x}\sin(2x)\,.$$

a. (15) Poiščite partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ *ima dve kompleksno konjugirani rešitvi* $-1+2i$ *in* $-1-2i$*. V enačbi desno stran nadomestimo z*

$$4\,e^{(-1+2i)x}\,.$$

Ker je koeficient pred x *v eksponentu ničla* $P(\lambda)$ *(enojna), iščemo rešitev z nastavkom*

$$y_p(x) = Axe^{(-1+2i)x}\,.$$

Odvajamo in dobimo

$$y_p'(x) = A(1 + x(-1+2i))e^{(-1+2i)x}$$

in

$$y_p''(x) = A(2(-1+2i) + x(-1+2i)^2)e^{(-1+2i)x}\,.$$

Vstavimo v enačbo in preuredimo.

$$A\left[x((-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 5) + 2(-1+2i) + 2\right]e^{(-1+2i)x} = 4\,e^{(-1+2i)x}\,.$$

Zmnožimo in sledi

$$4i \cdot A = 4\,,$$

torej

$$A = -i\,.$$

Partikularna rešitev bo imaginarni del produkta

$$(-i)\cdot x \cdot e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)\,,$$

torej

$$y_p(x) = -xe^{-x}\cos 2x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ničle karakterističnega polinoma: 3 točke.*
- *Nastavek: 3 točke.*
- *Odvajanje: 3 točke.*
- *Konstanta* A*: 3 točke.*
- *Rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza začetnima pogojema $y(0) = y'(0) = 0$.

Rešitev: Vemo, da je splošna rešitev oblike

$$y(x) = -xe^{-x}\cos 2x + c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x\,.$$

Določiti moramo konstante tako, da bo zadoščeno začetnima pogojema, torej

$$y(0) = c_1 = 0$$

in

$$y'(0) = -1 - c_1 + 2c_2 = 0\,.$$

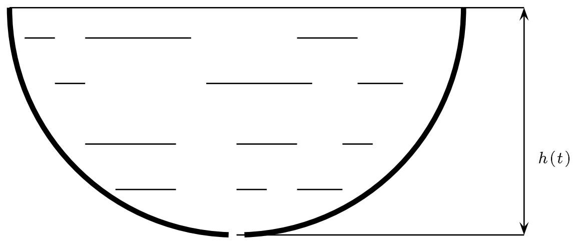
Sledi $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 1/2$. *Rešitev je torej*

$$y(x) = -xe^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Enačbi za koeficiente: 2 točki.*
- *Koeficienta: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

4. (25) Iz polkrožne posode s polmerom R, ki je napolnjena do roba, na dnu izteka tekočina skozi odprtino s presekom D. Z $h(t)$ označimo višino gladine vode v času t.



Po Toricellijevem zakonu [1] ustreza višina vode kot funkcija časa diferencialni enačbi

$$-h'S(h) = \mu D\sqrt{2gh}\,,$$

kjer je $S(h)$ površina gladine, ko je njena višina enaka h. V našem primeru je $S(h) = \pi h(2R-h)$.

a. (15) Pokažite, da rešitev h zgornje diferencialne enačbe pri začetnem pogoju $h(0) = R$ ustreza enačbi

$$(2R)\frac{2h^{3/2}}{3} - \frac{2h^{5/2}}{5} = -at + R^{5/2}\cdot 14/15,$$

kjer je $a = \mu D\sqrt{2g}/\pi$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v obliko primerno za integracijo.

$$h'\sqrt{h}(2R-h) = -\frac{\mu D\sqrt{2g}}{\pi}\,.$$

Integriramo obe strani in dobimo

$$(2R)\frac{2h^{3/2}}{3} - \frac{2h^{5/2}}{5} = -at + c,$$

kjer je z a označena konstanta na desni. Iz začetnega pogoja sledi, če vstavimo $t = 0$ in $h(0) = R$, da je

$$R^{5/2}(4/3 - 2/5) = c$$

ali $c = R^{5/2}\cdot 14/15$.

Ocenjevanje:

- *Prepis v obliko primerno za integriranje: 3 točke.*
- *Integriranje leve strani: 3 točke.*
- *Integriranje desne strani: 3 točke.*
- *Nastavek za konstanto: 3 točke.*
- *Rešitev: 3 točke.*

[1] Evangelista Torricelli (1608-1647), italijanski fizik in matematik

b. (10) Izračunajte čas do trenutnka, ko bo iz posode iztekla vsa voda.

Rešitev: Zanima nas čas, ko bo $h(t) = 0$. Vstavimo v enačbo v a. in dobimo

$$0 = -at + R^{5/2} \cdot 14/15\,.$$

Sledi

$$t = \frac{14R^{5/2}}{15a}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja za uporabo točke a.: 5 točk.*
- *Enačba za t: 3 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*