

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

3. kolokvij

2. april 2004

Ime in priimek: _____ Vpisna št:

--	--	--	--	--	--	--	--

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkcija f naj bo poljubno mnogokrat odvedljiva na \mathbb{R} . Naj bo $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ in naj velja zveza

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0.$$

a. (15) Označite $c_n = f^{(n)}(0)/n!$. S pomočjo Leibnizovega pravila pokažite

$$n^2 c_n + c_{n-2} = 0.$$

Namig: Enakost v besedilu naloge odvajajte n -krat po x .

b. (10) Zapišite Taylorjev polinom $2n$ -te stopnje za funkcijo $f(x)$ okrog točke $x_0 = 0$.

Namig: Obravnavajte c_n posebej za lihe in za sode n .

2. (25) Integracija *per partes*.

a. (15) Naj bo $m > 0$ liho celo število. Označite

$$I_m = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{m/2} dx .$$

Izberite $g(x) = 1$ in $F(x) = (1 - x^2)^{m/2}$ in izpeljite zvezo med I_m in I_{m-2} .

Namig: Na pravem mestu upoštevajte, da je $x^2 = 1 - (1 - x^2)$.

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{7/2} dx .$$

3. (25) Uvedba nove spremenljivke, integriranje racionalnih funkcij.

a. (10) V integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x + \sqrt{x^2 - 1})} dx$$

uvedite novo spremenljivko $x = \cosh u$.

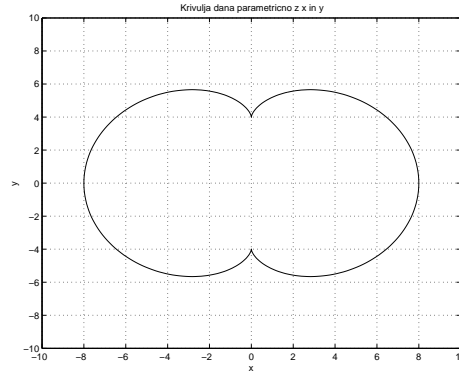
b. (15) Izračunajte integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x + \sqrt{x^2 - 1})} dx.$$

4. (25) Na sliki 1 je krivulja, ki je v parametrični obliki dana z

$$x(t) = 6 \cos t + 2 \cos 3t \quad \text{in} \quad y(t) = 6 \sin t + 2 \sin 3t$$

za $0 \leq t \leq 2\pi$.



Slika 1 Krivulja dana parametricno z $x(t)$ in $y(t)$.

a. (10) Izračunajte ploščino lika, ki ga objema krivulja.

Namig: $2 \sin t \sin 3t = \cos 4t - \cos 2t$.

b. (15) Izračunajte dolžino krivulje.

Namig: Preverite, da je $\cos t \cos 3t + \sin t \sin 3t = \cos 2t$.

