FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

1. kolokvij

27. marec 1998

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4 in vsaka je vredna 25 točk, torej skupaj 100 točk. Na razpolago imate 1 uro in pol (90 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (25) Izlimitirani integrali:

a. (15) Privzemite, da je za poljuben a

$$\int_0^\infty \cos(ax)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a^2} \quad \text{in} \quad \int_0^\infty \sin(ax)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{1+a^2}\,.$$

Pokažite, da je za poljuben a

$$\int_0^\infty x\cos(ax)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}\,.$$

Rešitev: Označimo želeni integral z I in integriramo dvakrat per partes.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty x\cos(ax)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -xe^{-x}\cos(ax)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (\cos(ax) - ax\sin(ax))\, e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} - a\int_0^\infty x\sin(ax)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} + axe^{-x}\sin(ax)\Big|_0^\infty - a\int_0^\infty (\sin(ax) + ax\cos(ax))e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} - \frac{a^2}{1+a^2} - a^2 I\,.
\end{aligned}$$

Izračunamo

$$(1+a^2)I = \frac{1-a^2}{1+a^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 5 točk.*
- *Drugo integriranje per partes: 5 točk.*
- *Enačba za I: 3 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Označite za $a, b > 0$

$$I_{a,b} = \int_b^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pokažite, da je

$$I_{a+1,b} = aI_{a,b} + b^a e^{-b}\,.$$

Izračunajte še $I_{3,\log 2}$.

Rešitev: Integriramo per partes.

$$\begin{aligned} I_{a+1,b} &= \int_b^\infty x^a e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -e^{-x}x^a\Big|_b^\infty + a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= b^a e^{-b} + aI_{a,b}\,. \end{aligned}$$

Za izračun $I_{3,\log 2}$ uporabimo zgornjo rekurzivno formulo.

$$\begin{aligned} I_{3,\log 2} &= 2I_{2,\log 2} + \frac{\log^2 2}{2} \\ &= 2(I_{1,\log 2} + \frac{\log 2}{2}) + \frac{\log^2 2}{2} \\ &= 2\cdot\frac{1}{2} + \log 2 + \frac{\log^2 2}{2}\,. \end{aligned}$$

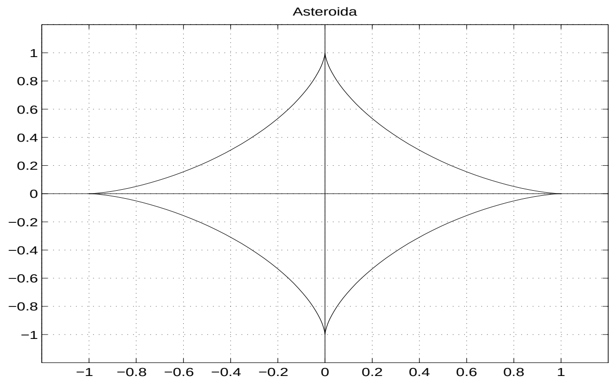
Ocenjevanje:

- *Integriranje per partes: 3 točke.*
- *Izpeljava rekurzivne formule: 3 točke.*
- *Pravilen poskus uporabe formule: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (25) Krivulja *asteroida* je dana v parametrični obliki z

$$x(t) = \cos^3 t \qquad \text{in} \qquad y(t) = \sin^3 t$$

za $0 \leq t \leq 2\pi$. Skica krivulje je na spodnji sliki.



a. (10) Izračunajte celotno dolžino krivulje.

Rešitev: Izračunajmo najprej $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t \\ &= 9\cos^2 t \sin^2 t\,. \end{aligned}$$

Zaradi simetrije lahko integriramo na intervalu $[0, \pi/2]$ in rezultat množimo s 4.

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 4 \cdot 3 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \,\mathrm{d}t \\ &= 6 \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izračun $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$: 3 točke.*
- *Pravilno nastavljen integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 4 točke.*

b. (15) Izračunajte ploščino (brez predznaka) lika, ki ga objema krivulja na sliki.

Namig: Uporabite formulo $P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\dot{x}y + x\dot{y})\,\mathrm{d}t$.

Rešitev: Po formuli je

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\dot{x}y + x\dot{y})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t\sin^4 t + \cos^4 t\sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Izračun $\dot{x}y$ in $x\dot{y}$: 3 točke.*
- *Pravilno nastavljen integral: 3 točke.*
- *Pravilna uporaba namiga: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (25) Dana je linearna diferencialna enačba prvega reda

$$y' + xy = f(x)\,.$$

a. (10) Zapišite splošno rešitev zgornje enačbe, če je $f(x) = 0$.

Rešitev: V primeru, ko je $f(x) = 0$ enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{y} = -x$$

in integriramo. Dobimo

$$\log(y) = -\frac{x^2}{2} + \log(c)$$

za poljubno konstanto ali

$$y(x) = ce^{-x^2/2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 5 točk.*
- *Rezultat: 5 točk.*

b. (15) Poiščite rešitev, ki ustreza pogoju $y(0) = 0$ in zgornji diferencialni enačbi za $f(x) = x$.

Rešitev: Potrebujemo partikularno rešitev. Po nastavku poiščemo funkcijo v, ki ustreza pogoju

$$v'(x) = xe^{x^2/2}\,.$$

Integriramo desno stran in dobimo

$$v(x) = e^{x^2/2}\,.$$

Partikularna rešitev bo $u \cdot v$, kjer je u rešitev homogene enačbe, torej konstanta 1. Rešitev, ki bo ustrezala začetnemu pogoju in nehomogeni enačbi, iščemo z nastavkom

$$y(x) = 1 + ce^{-x^2/2}\,.$$

Vstavimo $x = 0$ in dobimo enačbo $1 + c = 0$, torej je iskana rešitev

$$y(x) = 1 - e^{-x^2/2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek z variacijo konstante: 6 točk.*
- *Intergriranje: 3 točke.*
- *Enačba za konstanto c: 3 točke.*
- *Končna rešitev: 3 točke.*

4. (20) Po zakonu o vplivu mas v kemiji je hitrost reakcije med dvema reagentoma odvisna od njune koncentracije. Če predpostavimo začetni koncentraciji a in b (v molih na volumsko enoto), in označimo z $y(t)$ količino nastale spojine (v molih), potem funkcija y ustreza diferencialni enačbi

$$y' = k(a-y)(b-y)\,,$$

kjer je k primerna konstanta. Predpostavite še $0 < a < b$.

a. (15) Poiščite rešitev zgornje enačbe pri začetnem pogoju $y(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{(a-y)(b-y)} = k\,.$$

Obe strani integriramo (recimo z razstavljanjem na parcialne ulomke) in dobimo

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b-y}{a-y}\right) = kt + c\,.$$

Konstanto c določimo iz začetnega pogoja. Za $t = 0$ mora biti

$$\frac{1}{b-a}\log(\frac{b}{a}) = c\,.$$

Torej je rešitev podana z enačbo

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{a(b-y)}{b(a-y)}\right) = kt \quad (*)$$

Izračunamo še y iz zgornje enačbe in dobimo

$$y(t) = \frac{ab(1-e^{-k(b-a)t})}{b-ae^{-k(b-a)t}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v obliko z integriranje: 3 točke.*
- *Intergriranje: 6 točk.*
- *Enačba za konstanto c: 3 točke.*
- *Končna rešitev: 3 točke.*

b. (10) V času $t = 0$ je $y(0) = 0$. Pokažite, da je čas, ki je potreben, da nastane $a/2$ molov spojine enak

$$t = \frac{1}{k(b-a)} \log\left(\frac{2b-a}{b}\right)$$

Rešitev: Uporabimo $(*)$ *in dobimo*

$$kt = \frac{1}{b-a} \log\left(\frac{a(b-y)}{b(a-y)}\right) .$$

Ko bo $y(t) = a/2$ *bo veljalo*

$$kt = \frac{1}{b-a} \log\left(\frac{a(b-a/2)}{b(a-a/2)}\right) .$$

Iz tega izračunamo t.

Ocenjevanje:

- *Nastavitev enačbe: 5 točk.*
- *Rešitev: 5 točk.*