FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

2. kolokvij

15. maj 1998

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4 in vsaka je vredna 25 točk, torej skupaj 100 točk. Na razpolago imate 1 uro in pol (90 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Dani naj bodo vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}$ in $\mathbf{c}'$ v 3-dimenzionalnem prostoru in naj velja

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{a},\mathbf{a}')=1 & (\mathbf{a},\mathbf{b}')=0 & (\mathbf{a},\mathbf{c}')=0 \\ (\mathbf{b},\mathbf{a}')=0 & (\mathbf{b},\mathbf{b}')=1 & (\mathbf{b},\mathbf{c}')=0 \\ (\mathbf{c},\mathbf{a}')=0 & (\mathbf{c},\mathbf{b}')=0 & (\mathbf{c},\mathbf{c}')=1 \end{array}$$

a. (10) Pokažite, da so vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ linearno neodvisni.

Rešitev: Naj bo $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=0$. *Enačbo pomnožimo skalarno z* $\mathbf{a}'$ *in upoštevamo zgornje skalarne produkte. Dobimo* $\lambda=0$. *Podobno se prepričamo, da morata biti* μ *in* ν *enaka 0.*

Ocenjevanje:

- *Nastavek* $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=0$*: 5 točk.*
- *Sklepanje, da je* $\lambda=\mu=\nu=0$*: 5 točk.*

b. (15) Dokažite, da je

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot\mathbf{c}' \\ \mathbf{c}\times\mathbf{a} &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}' \quad \text{in} \\ \mathbf{b}\times\mathbf{c} &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}' \end{aligned}$$

in dokažite, da je

$$((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2\,.$$

Namig za drugi del: Lagrangeova identiteta.

Rešitev: Po Lagrangeovi identiteti računamo

$$\begin{aligned} ((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{a},\mathbf{c})-(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{c}\times\mathbf{a},\mathbf{b}) \\ &= -(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{c}\times\mathbf{a},\mathbf{b}) \\ &= -(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2 \end{aligned}$$

Iz besedila naloge je razvidno, da je vektor $\mathbf{c}'$ *pravokoten na* $\mathbf{a}$ *in na* $\mathbf{b}$*, torej je* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\lambda\mathbf{c}'$ *za nek* λ. *Pomnožimo obe strani enačbe z* $\mathbf{c}$ *in upoštevamo* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ *in* $(\mathbf{c},\mathbf{c}')=1$ *in dobimo* $\lambda=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$.

Ocenjevanje:

- *Upoštevanje, da je* $\mathbf{c}'$ *pravokoten na* $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{b}$ *: 3 točke.*
- *Izračun koeficienta: 3 točke.*
- *Pravilna uporaba Lagrangeove identitete: 3 točke.*
- *Opažanje, da nekateri členi odpadejo: 3 točke.*
- *Upoštvanje pravil za permutacijo členov v mešanem produktu: 3 točke.*

2. (25) Dani naj bosta matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. (10) Pokažite, da je $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ in $\mathbf{B}^m = \mathbf{B}$ za poljubni pozitivni celi števili n in m.

Rešitev: Zaradi asociativnosti množenja matrik je dovolj pokazati, da je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ *in* $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$. *V to se prepričamo s preprostim računom.*

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je preverjanje za* $n = m = 2$ *dovolj: 4 točke.*
- *Množenje za* $\mathbf{A}$*: 3 točke.*
- *Monoženje za* $\mathbf{B}$*: 3 točke.*

b. (15) Izračunajte $\mathbf{AB}$ in $\mathbf{BA}$ in še $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$.

Rešitev: Zlahka se prepričamo, da je $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ *in* $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$. *Kvadrat napišemo kot*

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 &= (\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A}^2 - \mathbf{AB} - \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2 \\ &= \mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{B} + \mathbf{B} \\ &= \mathbf{A} - \mathbf{B} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje* $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$*: 5 točk.*
- *Preverjanje* $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$*: 5 točk.*
- *Izračun* $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$*: 5 točk.*

3. (25) Dan naj bo sistem linearnih enačb oblike

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & & & 2x_3 & - & x_4 & = & a \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & + & x_4 & = & b \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 16x_3 & + & 6x_4 & = & c \end{array}$$

a. (10) Ali ima enačba rešitev, če je $a = 8$, $b = -4$ in $c = 2$.

Rešitev: Izvedemo Gaussov postopek in dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 16 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -28 \\ 0 & 4 & 12 & 8 & -14 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

Sistem nima rešitev.

Ocenjevanje:

- *Prvi korak Gaussovega postopka: 4 točke.*
- *Drugi korak Gaussovega postopka: 4 točke.*
- *Sklep, da ni rešitev: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $a = 1$ in $b = 1$. Za katere c ima sistem rešitve? Napišite vse rešitve.

Rešitev: Izvedemo spet Gaussov postopek. V primerjavi z a. se spremeni samo zadnji stolpec. Dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+2 \end{pmatrix}$$

Sistem ima rešitev, če je $c = -2$. *V tem primeru si lahko izberemo* x_3 *in* x_4 *in izrazimo* $x_1 = 1 - 2x_3 + x_4$ *in* $x_2 = -1 - 3x_3 - 2x_4$. *Iz tega preberemo splošno rešitev*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Pravilno izpeljan Gaussov postopek: 3 točke.*
- *Ugotovitev* $c = -2$: *3 točke.*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*
- *Prva in druga rešitev homogene enačbe: 3+3 točke.*

4. (25) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a. (10) Poiščite lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Izračunati moramo karakteristični polinom, torej

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)\,.$$

Ničli sta $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 3(dvojna)$.

Ocenjevanje:

- *Izračun karakterističnega polinoma: 6 točk.*
- *Ničle: 4 točke.*

b. (15) Navedite vse linearno neodvisne lastne vektorje matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Najprej poiščimo lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 2$. Rešiti moramo sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & + \; x_3 & = & 0 \\ & & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Razberemo $x_1 = -x_3 = 0$. Komponento x_2 lahko še izberemo. Lastni vektor je tako $\mathbf{x}_1 = (0,1,0)$. Ker je $\mathrm{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 2$, je to edini lastni vektor. Za $\lambda_2 = 3$ dobimo enačbe

$$\begin{array}{rcl} & x_3 & = 0 \\ - \; x_2 & & = 0 \end{array}$$

Sledi $x_2 = x_3 = 0$. Komponento x_1 si lahko še izbiramo in si izberimo recimo $\mathbf{x}_2 = (1,0,0)$. Ker je $\mathrm{rang}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 2$, je to edini lastni vektor, ki pripada λ_2.

Ocenjevanje:

- *Linearni enačbi za lastne vektorje: 5 točk.*
- *Štetje lin. neodvisnih latnih vektorjev za vsako lastno vrednost: 5 točk.*
- *Končna lastna vektorja: 5 točk.*