FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

4. kolokvij

19. maj 2000

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Na intervalu $[0,1]$ funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n u)}{n^3}$$

konvergira po točkah proti funkciji

$$f(u) = 4\pi^3 \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4} + \frac{u}{12}\right).$$

a. (10) Pokažite, da funkcijsko vrsto lahko členoma integriramo na intervalu $[0,x]$, kjer je $0 < x < 1$, in sklepajte, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2\pi n^4} = \frac{\pi^3}{96}$$

Rešitev: Vrsta je zaradi $|\sin(2\pi n u)| \leq 1$ *dominirana z vrsto* $\sum_n n^{-3}$*, ki konvergira. Konvergenca vrste je zato enakomerna. Za enakost integriramo levo in desno stran na intervalu* $[0,1/2]$*. Integral leve strani je*

$$4\pi^3\left(\frac{1}{16\cdot 24} - \frac{1}{12\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 24}\right) = \frac{\pi^3}{96}.$$

Integrirajmo še desno stran po členih, kar lahko in dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2\pi n^4}.$$

Izenačimo in sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2\pi n^4} = \frac{\pi^3}{96}.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z majoriziranjem: 2 točki.*
- *Izpeljava ideje z majoriziranjem: 2 točki.*
- *Integriranje leve strani: 2 točki.*
- *Integriranje desne strani: 2 točki.*
- *Izenačenje in utemeljitev legalnosti: 2 točki.*

b. (15) Pokažite, da funkcijsko vrsto lahko členoma odvajamo in sklepajte, da je

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^2} = 4\pi^3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\right).$$

Rešitev: Preveriti moramo, da funkcijska vrsta iz odvodov členov enakomerno konvergira. Ker je $|\cos(2\pi n x)| \leq 1$ *za vse* x*, je vrsta iz odvodov majorizirana z vrsto* $\sum_n 2\pi/n^2$*, ki konvergira. Smemo torej členoma odvajati, kar nam da zgornjo vrsto.*

Ocenjevanje:

- *Odvodi členov: 3 točke.*
- *Opažanje, da so členi majorizirani z* $2\pi/n^2$*: 3 točke.*
- *Sklep: 3 točke.*
- *Izenačenje odvodov leve in desne strani: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

2. (20) Naj bosta dana vektorja

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ in $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$.

Resšitev: Uporabimo Lagrangeovo identiteto. Dobimo

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = 1\,.$$

Rezultat za drugo normo je 0, ker je vedno $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$.

Ocenjevanje:

- *Lagrange: 2 točki.*
- *Pravilna uporaba: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*
- *Kakršna koli poto do rešitve: 4 točke.*

b. (15) Poiščite vektor $\mathbf{c}$ dolžine 1, ki je pravokoten na vektor $\mathbf{a}$, njegova projekcija na vektor $\mathbf{b}$ je $\mathbf{b}/2$ in je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$.

Rešitev: Opazimo, da je vektor $\mathbf{b}$ *pravokoten na vektor* $\mathbf{a}$. *Nanj je pravokoten tudi vektor* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Vsak vektor, pravokoten na* $\mathbf{a}$, *lahko napišemo kot*

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{b} + \mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,,$$

določiti pa moramo še konstante tako, da bo vektor $\mathbf{c}$ *ustrezal ostalima dvema zahtevama. Najprej izračunajmo projekcijo vektorja* $\mathbf{c}$ *na vektor* $\mathbf{b}$. *Po formuli je ta projekcija*

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} \cdot \mathbf{b} &= \frac{(\lambda \mathbf{b} + \mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} \cdot \mathbf{b} \\ &= \lambda \mathbf{b}\,. \end{aligned}$$

Upoštevali smo linearnost skalarnega produkta in to, da sta vektorja $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *pravokotna in je njun skalarni produkt enak* 0. *Sledi, da je* $\lambda = 1/2$. *Potrebujemo še* μ. *Množimo obe strani enačbe skalarno z* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Dobimo*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mu\,,$$

ker je $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 1$. *Konstanta* μ *bo torej pozitivna. Vektor mora imeti dolžino* 1 *in po Pitagori je*

$$1 = |\mathbf{c}|^2 = \lambda^2 + \mu^2\,.$$

Sledi $\mu = \sqrt{3}/2$.

Ocenjevanje:

- *Linearna kombinacija: 3 točke.*
- *Ideja s projekcijo: 3 točke.*
- *Prva konstanta: 3 točke.*
- *Dolžina in enačba za* μ*: 3 točke.*
- *Konstanta* μ*: 3 točke.*

3. (25) Naj bodo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ poljubni vektorji.

a. (10) Pokažite, da je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{c},\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2 .$$

Rešitev: Uporabili bomo pravilo, da je

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z} = -(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathbf{x} + (\mathbf{x},\mathbf{z})\mathbf{y} .$$

Računamo najprej

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) &= -(\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{c})\ \mathbf{a} + (\mathbf{a},\mathbf{a}\times\mathbf{c})\ \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\ \mathbf{a}\end{aligned}$$

Uporabili smo dejstvo, da sta vektorja $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ *pravokotna in je njun skalarni produkt enak* 0*. Nadaljujemo*

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{c},\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\ (\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za* $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}$*: 2 točki.*
- *Prva uporaba pravila: 2 točki.*
- *Ortogonalnost: 2 točki.*
- *Druga uporaba pravila* $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}$*: 2 točki.*
- *Permutacije pri mešanem produktu: 2 točki.*

b. (15) Pokažite, da je

$$(((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a})\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = (\mathbf{a},\mathbf{b})^2\ \mathbf{a} - (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{a},\mathbf{b})\ \mathbf{b} .$$

Rešitev: Uporabimo isto pravilo kot v a. Računamo po vrsti:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a},\mathbf{a})\mathbf{b} .$$

Množimo rezultat vektorsko z $\mathbf{b}$*. Dobimo*

$$-(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) .$$

Upoštevali smo, da je $\mathbf{b}\times\mathbf{b} = 0$*. Množimo še enkrat vektorsko z* $\mathbf{a}$*. Sledi rezultat*

$$-(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot(-(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a},\mathbf{a})\mathbf{b})\ .$$

Rezultat še polepšamo v

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})^2\ \mathbf{a} - (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{a},\mathbf{b})\ \mathbf{b} .$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo prvič: 3 točke.*
- *Pravilo drugič: 3 točke.*
- *Ortogonalnost: 3 točke.*
- *Pravilo tretjič: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Pokažite, da je $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$ in $\mathbf{B}^4 = -4\mathbf{I}$.

Rešitev: Prvi dve enakosti sta stvar matričnega množenja. Izračunamo

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kvadriramo še enkrat in dobimo

$$\mathbf{B}^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Množenje* $\mathbf{AC}$*: 2 točki.*
- *Množenje* $\mathbf{CA}$*: 2 točki.*
- *Kvadriranje* $\mathbf{B}$*: 2 točki.*
- *Kvadriranje še enkrat: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte $\mathbf{ABCABCABCABC}$.

Namig: Postavite prav oklepaje.

Rešitev: Najprej opazimo, da je $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$*. Uporabimo je* $\mathbf{B}^4 = -4\mathbf{I}$*. Sledi*

$$\begin{aligned} \mathbf{ABCABCABCABC} &= \mathbf{AB}^4\mathbf{C} \\ &= -4\mathbf{AC} \\ &= -4\mathbf{I} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba* $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$*: 3 točke.*
- *Odstranitev vseh* $\mathbf{CA}$*: 3 točke.*
- *Uporaba* $\mathbf{B}^n = n\mathbf{B}$*: 3 točke.*
- *Izpostavljanje 4: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*