FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

4. kolokvij

31. maj 2002

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (20) Dani naj bodo vektorji

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite vektor $\mathbf{x}$ dolžine 1, ki je pravokoten na ravnino, ki jo določajo točke $T_1(1,1,1)$, $T_2(-1,0,1)$ in $T_3(0,2,0)$ in je $(\mathbf{a},\mathbf{x}) > 0$.

Rešitev: Vektor $\mathbf{x}$ mora biti pravokoten na $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ in $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, torej je oblike

$$\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{c}) \times (\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

za primerno konstanto λ. Vektor mora biti dolžine 1, zato je $|\lambda| = 1/\sqrt{14}$. Iz $(\mathbf{a},\mathbf{x}) > 0$ sledi še, da je $\lambda \cdot (-4) > 0$ ali $\lambda < 0$. Sledi

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je $\mathbf{x}$ kolinearen vektroskemu produktu: 4 točke.*
- *Izračun absolutne vrednosti λ: 2 točki.*
- *Izračun predznaka λ: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

Rešitev: Po formuli za pravokotno projekcijo vektorja na dan vektor je iskani rezultat enak

$$\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{c})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{c}, \mathbf{a}\times\mathbf{c})} \cdot \mathbf{a}\times\mathbf{c}\,.$$

Posamezne skalarne produkte lahko izračunamo po Lagrangeovi identiteti.

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{c}) - (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{a}) = 0\,.$$

Pravokotna projekcija je enaka 0.

Ocenjevanje:

- *Formula za pravokonto projekcijo: 3 točke.*
- *Izračun posameznih skalarnih produktov: 3 točke.*
- *Rezultat: 4 točke.*

2. (25) Naj bo dan enotski vektor $\mathbf{e}$ v prostoru. Enotska vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ naj bosta oba pravokotna na vektor $\mathbf{e}$ in naj oklepata kot $\alpha \in [0, \pi)$. Velja naj tudi $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{e}) > 0$.

a. (10) Pokažite, da je

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sin \alpha\,.$$

Rešitev: Iz lastnosti mešanega produkta sledi

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{e})\,.$$

Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *kaže v smeri vektorja* $\mathbf{e}$ *po predpostavki in je velikosti* $\sin \alpha$. *Trditev sledi.*

Ocenjevanje:

- *Vrstni red: 2 točki.*
- *Kolinearnost* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *in* $\mathbf{e}$*: 2 točki.*
- *Velikost* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$*: 2 točki.*
- *Skalarni produkt: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Pokažite, da je

$$\mathbf{y} = \cos \alpha\, \mathbf{x} + \sin \alpha\, (\mathbf{e} \times \mathbf{x})$$

Namig: Zapišemo lahko

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + \mu (\mathbf{e} \times \mathbf{x})\,,$$

tako da je potrebno le še poiskati koeficienta λ *in* μ.

Rešitev: Vektor $\mathbf{y}$ *leži v ravnini pravokotni na* $\mathbf{e}$. *To ravnino napenjata vektorja* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{e} \times \mathbf{x}$, *torej je*

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + \mu (\mathbf{e} \times \mathbf{x})\,.$$

Poiskati moramo koeficienta λ *in* μ. *Množimo najprej enačbo skalarno z* $\mathbf{x}$. *Ker je* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos \alpha$ *(vektorja sta enotska!), je*

$$\cos \alpha = \lambda\,.$$

Upoštevali smo, da je $(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. *Množimo še skalarno z* $\mathbf{y}$. *Dobimo*

$$1 = \cos^2 \alpha + \mu (\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{y})\,.$$

Upoštevamo a. in dobimo

$$1 - \cos^2 \alpha = \mu \sin \alpha$$

ali $\mu = \sin \alpha$. *Formula trivialno drži za* $\alpha = 0$.

Ocenjevanje:

- *Zapis z linearno kombinacijo: 3 točke.*
- *Množenje z* $\mathbf{x}$*: 3 točke.*
- λ*: 3 točke.*
- *Množenje z* $\mathbf{y}$*: 3 točke.*
- μ*: 3 točke.*

3. (25) Dane so matrike

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. (15) Poiščite matriko $\mathbf{X}$, ki ustreza enačbi

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{C}.$$

Rešitev: Najprej izračunamo, da je

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \qquad \textit{in} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}.$$

Enačbo množimo z leve z $\mathbf{B}$ *in z desne z* $\mathbf{A}$*. Dobimo*

$$4\mathbf{X} = \mathbf{BCA} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Inverz* $\mathbf{A}$*: 3 točke.*
- *Inverz* $\mathbf{B}$*: 3 točke.*
- *Ideja z množenjem: 3 točke.*
- *Množenje martik: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Preverite, da je $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$. Za dano naravno število $n \geq 1$ rešite enačbo

$$\mathbf{A}^{4n}\mathbf{X}\mathbf{B}^{4n} = \mathbf{I}.$$

Rešitev: Množimo z leve z $\mathbf{A}^{-4n}$ *in z desne z* $\mathbf{B}^{-4n}$*. Sledi*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-4n}\mathbf{B}^{-4n}.$$

Ker $\mathbf{A}$ *in* $\mathbf{B}$ *komutirata, je*

$$\mathbf{A}^{-4n}\mathbf{B}^{-4n} = (\mathbf{AB})^{-4n} = 2^{-4n}\mathbf{I}.$$

Sledi

$$\mathbf{X} = 2^{-4n}\mathbf{I}.$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje komutiranja: 2 točki.*
- *Množenje z leve in desne: 2 točki.*
- *Uporaba komutiranja: 2 točki.*
- *Potenca: 2 točki.*
- $\mathbf{X}$*: 2 točki.*

4. (25) Dan naj bo sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & -3 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & -1 \end{array}$$

a. (10) Pokažite, da sistem ima rešitve.

Rešitev: Zapišemo razširjeno matriko sistema in izvedemo Gaussov postopek. Pri tem upoštevamo, da lahko zamenjamo vrstni red vrstic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Rang razširjene matrike je enak rangu matrike. Sistem ima rešitev.

Ocenjevanje:

- *1. korak: 2 točki.*
- *2. korak: 2 točki.*
- *3. korak: 2 točki.*
- *4. korak: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Poiščite vse rešitve sistema.

Rešitev: Izračunamo $k = 5 - 4 = 1$. *Vse rešitve bodo oblike*

$$\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{y} ,$$

kjer je $\mathbf{x}_0$ *partikularna rešitev,* $\mathbf{y}$ *pa napenja jedro. Za partikularno rešitev izberimo* $x_5 = 0$. *Računamo* $x_4 = -1$, $x_3 = 3$, $x_2 = -5$ *in* $x_1 = 6$. *Za izračun*

$\mathbf{y}$ *izberimo* $x_5 = 1$ *in desno stran izenačimo z* 0. *Rešujemo po vrsti* $x_4 = -1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1$ *in* $x_1 = -1$. *Vse rešitve so oblike*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Enačbe za* $\mathbf{x}_0$*: 3 točke.*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*
- *Dimenzija jedra: 3 točke.*
- *Enačbe za* $\mathbf{y}$*: 3 točke.*
- $\mathbf{y}$*: 3 točke.*