FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

4. kolokvij

28. maj 2004

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Pri adiabatni spremembi ustreza masna gostota $\rho = \rho(T)$ idealnega plina kot funkcija temperature diferencialni enačbi

$$mc_V = mR\rho^{-1}(T)T\rho'(T)\,,$$

kjer je m masa plina, c_V konstantna specifična toplota plina in R plinska konstanta.

a. (15) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišimo v

$$\frac{\rho'(T)}{\rho(T)} = \frac{c_V}{RT}\,.$$

Integriramo na obeh straneh in dobimo

$$\log(\rho) = \frac{c_V}{R}\log(T) + \log c$$

za neko konstanto c. Sledi

$$\rho(T) = cT^{c_V/R}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Enačba z ločljivima spremenljivkama: 3 točke.*
- *Prepis: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Kaj s konstanto: 3 točke.*
- *Splošna rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, za katero je $\rho_0 = \rho(T_0)$.

Rešitev: Določiti moramo konstanto c tako, da bo enačba zadoščala začetnim pogojem. Veljati mora

$$\rho_0 = \rho(T_0) = cT_0^{c_V/R}\,.$$

Z nekaj računanja sledi

$$\rho(T) = \rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_V/R}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Enačba za c: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' - 2y' + y = e^x \sin x \,.$$

a. (15) Poiščite funkcijo, ki ustreza zgornji enačbi.

Rešitev: Karakteristični polinom je oblike $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ *z dvojno ničlo* $\lambda = 1$. *Rešitvi homogene enačbe sta* $y_1(x) = e^x$ *in* $y_2(x) = xe^x$. *Determinanto Wronskega izračunamo kot*

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^x(e^x + xe^x) - xe^{2x} = e^{2x} \,.$$

Partikularno rešitev enačbe dobimo po formuli

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(u)g(u)}{W(u)} \,\mathrm{d}u + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(u)g(u)}{W(u)} \,\mathrm{d}u \,.$$

Izberimo si, recimo, $x_0 = 0$. *Računamo*

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -e^x \int_0^x u \sin u \,\mathrm{d}u + xe^x \int_0^x \sin u \,\mathrm{d}u \\ &= -e^x\,(-x\cos x + \sin x) + xe^x\,(1 - \cos x) \\ &= -e^x \sin x + xe^x \,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ničle karakterističnega polinoma: 3 točke.*
- *Rešitvi homogene enačbe: 3 točke.*
- *Determinanta Wronskega: 3 točke.*
- *Formula za partikularno rešitev: 3 točke.*
- *Integriranje in rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza začetnima pogojema $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$.

Rešitev: Vse rešitve so oblike

$$y(x) = -e^x \sin x + c_1 e^x + c_2 x e^x \,.$$

Iz začetnih pogojev dobimo enačbi

$$1 = c_1 \qquad \textit{in} \qquad 0 = -1 + c_1 + c_2 \,.$$

Sledi $c_1 = 1$ *in* $c_2 = 0$. *Rešitev, ki ustreza začetnim pogojem, je*

$$y(x) = -e^x \sin x + e^x \,.$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Upoštevanje prvega pogoja: 2 točki.*
- *Upoštevanje drugega pogoja: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

3. (25) Naj bosta $\mathbf{e}$ in $\mathbf{x}$ enotska vektorja v prostoru. Definirajte vektor

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x},\mathbf{e})\,\mathbf{e} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{x} - (\mathbf{e},\mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\mathbf{e}\times\mathbf{x})\,.$$

a. (15) Izračunajte dolžino vektorja $\mathbf{y}$.

Rešitev: Dolžino vektorja lahko izračunamo kot $|\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{y},\mathbf{y})$. *Računamo z upoštevanjem, da je* $(\mathbf{e},\mathbf{e}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) = 1$. *Uporabimo tudi Lagrangeovo formulo* $(\mathbf{e}\times\mathbf{x},\mathbf{e}\times\mathbf{x}) = (\mathbf{e},\mathbf{e})(\mathbf{x},\mathbf{x}) - (\mathbf{e},\mathbf{x})^2$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y},\mathbf{y}) &= (\mathbf{x},\mathbf{e})^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - (\mathbf{e},\mathbf{x})\,\mathbf{e}, \mathbf{x} - (\mathbf{e},\mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}\times\mathbf{x},\mathbf{e}\times\mathbf{x}) + \\
&\qquad + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\mathbf{x},\mathbf{e})(\mathbf{e},\mathbf{x} - (\mathbf{e},\mathbf{x})\,\mathbf{e}) + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\mathbf{x},\mathbf{e})(\mathbf{e},\mathbf{e}\times\mathbf{x}) + \\
&\qquad + 2\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{x} - (\mathbf{e},\mathbf{x})\,\mathbf{e},\mathbf{e}\times\mathbf{x}) \\
&= (\mathbf{x},\mathbf{e})^2 + \frac{1}{2}(1 - (\mathbf{e},\mathbf{x})^2) + \frac{1}{2}(1 - (\mathbf{e},\mathbf{x})^2) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Sledi $|\mathbf{y}| = 1$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z* $(\mathbf{y},\mathbf{y})$: *3 točke.*
- *Razvoj skalarnega produkta: 3 točke.*
- *Upoštevanje, da sta* $\mathbf{e}$ *in* $\mathbf{x}$ *enotska: 3 točke.*
- *Ortogonalnost in Lagrangeova formula: 3 točke.*
- *Končna dolžina: 3 točke.*

b. (10) Privzemite, da imata $\mathbf{e}$ in $\mathbf{x}$ koren v izhodišču. Izračunajte pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{x}$ na ravnino, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na vektor $\mathbf{e}$.

Rešitev: Z nekaj razmisleka se prepričamo, da bo iskana projekcija, recimo ji $\mathbf{z}$, *oblike* $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \lambda\,e$. *Ta vektor mora ležati v ravnini pravokotni na vektor* $\mathbf{e}$. *Sledi, da mora veljati*

$$0 = (\mathbf{z},\mathbf{e}) = (\mathbf{x} - \lambda\,\mathbf{e},\mathbf{e})\,,$$

torej

$$(\mathbf{x},\mathbf{e}) - \lambda(\mathbf{e},\mathbf{e}) = (\mathbf{x},\mathbf{e}) - \lambda = 0\,.$$

Sledi $\lambda = (\mathbf{x}, e)$. *Iskana projekcija je*

$$\mathbf{x} - (\mathbf{x},\mathbf{e})\,\mathbf{e}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja: 2 točki.*
- *Oblika projekcije: 2 točki.*
- *Upoštevanje ortogonalnosti na* $\mathbf{e}$: *2 točki.*
- λ: *2 točki.*
- *Projekcija: 2 točki.*

4. (25) Dan naj bo sistem linearnih enačb oblike

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & & & 2x_3 & - & x_4 & = & a \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & + & x_4 & = & b \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 16x_3 & + & 6x_4 & = & c \end{array}$$

a. (10) Ali ima enačba rešitev, če je $a = 8$, $b = -4$ in $c = 2$.

Rešitev: Izvedemo Gaussov postopek in dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 16 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -28 \\ 0 & 4 & 12 & 8 & -14 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

Sistem nima rešitev.

Ocenjevanje:

- *Prvi korak Gaussovega postopka: 4 točke.*
- *Drugi korak Gaussovega postopka: 4 točke.*
- *Sklep, da ni rešitev: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $a = 1$ in $b = 1$. Za katere c ima sistem rešitve? Napišite vse rešitve.

Rešitev: Izvedemo spet Gaussov postopek. V primerjavi z a. se spremeni samo zadnji stolpec. Dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+2 \end{pmatrix}$$

Sistem ima rešitev, če je $c = -2$. V tem primeru si lahko izberemo x_3 in x_4 in izrazimo $x_1 = 1 - 2x_3 + x_4$ in $x_2 = -1 - 3x_3 - 2x_4$. Iz tega preberemo splošno rešitev

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Pravilno izpeljan Gaussov postopek: 3 točke.*
- *Ugotovitev $c = -2$: 3 točke.*
- *Partikularna rešitev: 3 točke.*
- *Prva in druga rešitev homogene enačbe: 3+3 točke.*