FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

4. kolokvij

28. maj 2004

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) V matematični biologiji nastopi *Beverton-Holtova* diferencialna enačba

$$y' = -(a+by)y\,,$$

kjer sta a in b dani pozitivni konstanti.

a. (15) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{(a+by)y} = -1\,.$$

Za rešitev je treba izračunati integral

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{(a+by)y} &= \frac{1}{a}\int\left(\frac{-b}{a+by}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{a}\left(-\log(a+by)+\log y\right)\,.\end{aligned}$$

Sledi

$$\log\left(\frac{y}{a+by}\right) = -a(x+c)$$

za neko konstanto c. Sledi

$$\frac{y}{a+by} = e^{-a(x+c)}$$

ali

$$y = \frac{ae^{-a(x+c)}}{1-be^{-a(x+c)}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis v običajno obliko: 3 točke.*
- *Pacialni ulomki: 3 točke.*
- *Integral na levi: 3 točke.*
- *Pretvorba: 3 točke.*
- *Splošna reštev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe, za katero je $y(0) = y_0 > 0$.

Rešitev: V splošni rešitvi moramo določiti ustrezno konstanto. Dobimo

$$\frac{y_0}{a+by_0} = e^{-ac}\,.$$

Sledi

$$y = \frac{ay_0e^{-ax}}{a+by_0-by_0e^{-ax}} = \frac{ay_0e^{-ax}}{a+by_0(1-e^{-ax})}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kam bi del?: 2 točki.*
- *Enačba za konstanto: 2 točki.*
- *Uporaba a.: 2 točki.*
- *Enačba za c: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

2. (25) Dana naj bo linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}\sinh x\,.$$

a. (15) Poiščite funkcijo, ki ustreza zgornji enačbi.

Rešitev: Karakteristični polinom je oblike $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ *z dvojno ničlo* $\lambda = -1$. *Rešitvi homogene enačbe sta* $y_1(x) = e^{-x}$ *in* $y_2(x) = xe^{-x}$. *Determinanto Wronskega izračunamo kot*

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-x}(e^{-x} - xe^{-x}) + xe^{-2x} = e^{-2x}\,.$$

Partikularno rešitev enačbe dobimo po formuli

$$y_p(x) = -y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u + y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Izberimo si, recimo, $x_0 = 0$. *Računamo*

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -e^{-x}\int_0^x u\sinh u\,\mathrm{d}u + xe^{-x}\int_0^x \sinh u\,\mathrm{d}u \\ &= -e^{-x}\,(x\cosh x - \sinh x) + xe^{-x}\,(\cosh x - 1) \\ &= e^{-x}\sinh x - xe^{-x}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ničle karakterističnega polinoma: 3 točke.*
- *Rešitvi homogene enačbe: 3 točke.*
- *Determinanta Wronskega: 3 točke.*
- *Formula za partikularno rešitev: 3 točke.*
- *Integriranje in rešitev: 3 točke.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza začetnima pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

Rešitev: Vse rešitve so oblike

$$y(x) = e^{-x}\sinh x + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}\,.$$

Iz začetnih pogojev dobimo enačbi

$$0 = c_1 \qquad \text{in} \qquad 1 = 1 - c_1 + c_2\,.$$

Sledi $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 0$. *Rešitev, ki ustreza začetnim pogojem, je*

$$y(x) = e^{-x}\sinh x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Upoštevanje prvega pogoja: 2 točki.*
- *Upoštevanje drugega pogoja: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

3. (25) Naj bosta $\mathbf{e}$ in $\mathbf{x}$ enotska vektorja v prostoru, ki nista kolinearna.

a. (15) Definirajte vektor $\mathbf{y}$ kot linearno kombinacijo $\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x})$. Izrazite dolžino vektorja $\mathbf{y}$ s skalarji λ, μ in $(\mathbf{e}, \mathbf{x})$. Izrazite mešani produkt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e})$ s skalarji λ, μ in $(\mathbf{e}, \mathbf{x})$

Rešitev: Dolžino vektorja $\mathbf{y}$ *izračunamo kot*

$$\begin{aligned}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) &= \lambda^2(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}, \mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu^2(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}) \\ &= \lambda^2(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2) + \mu^2(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2) \\ &= (\lambda^2 + \mu^2)(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2)\,.\end{aligned}$$

Za izračun $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e})$ *vstavimo* $\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x})$. *Če uporabimo linearnost mešanega produkta v vsaki spremenljivki, dobimo, da je*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}) = (\mathbf{x}, \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x}), \mathbf{e})\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}) &= (\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x}), \mathbf{e}) \\ &= \mu(\mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{e}) \\ &= -\mu(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}) \\ &= \mu(\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}) \\ &= \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}) \\ &= \mu(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2)\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z* $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$: *3 točke.*
- *Izračun: 3 točke.*
- *Ideja z menjavanjem vrstnega reda: 3 točke.*
- *Izpostavljanje* μ: *3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Privzemite, da imata $\mathbf{e}$ in $\mathbf{x}$ koren v izhodišču. Izračunajte pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{x}$ na ravnino, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na vektor $\mathbf{e}$.

Rešitev: Z nekaj razmisleka se prepričamo, da bo iskana projekcija, recimo ji $\mathbf{z}$, *oblike* $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \lambda\,e$. *Ta vektor mora ležati v ravnini pravokotni na vektor* $\mathbf{e}$. *Sledi, da mora veljati*

$$0 = (\mathbf{z}, \mathbf{e}) = (\mathbf{x} - \lambda\,\mathbf{e}, \mathbf{e})\,,$$

torej

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}) - \lambda(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\mathbf{x}, \mathbf{e}) - \lambda = 0\,.$$

Sledi $\lambda = (\mathbf{x}, e)$. *Iskana projekcija je*

$$\mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{e})\,\mathbf{e}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja: 2 točki.*
- *Oblika projekcije: 2 točki.*
- *Upoštevanje ortogonalnosti na* $\mathbf{e}$*: 2 točki.*
- λ*: 2 točki.*
- *Projekcija: 2 točki.*

4. (25) Dan naj bo sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & \lambda x_3 & = & 2-\lambda \end{array}$$

a. (15) Ali ima ta sistem rešitev za vsak λ?

Rešitev: Izvedemo Gaussov postopek na razširjeni matriki:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -3\lambda-2 & 5-3\lambda \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3\lambda-9 & -9-3\lambda \end{pmatrix}$$

Če je $\lambda \neq -3$ sta ranga matrike in razširjene matrike enaka 3, torej sistem ima rešitev. Če je $\lambda = -3$, sta ranga enaka 2 in sistem tudi ima rešitev.

Ocenjevanje:

- *Zapis razširjene matrike: 3 točke.*
- *Prvi korak Gaussovega postopka: 3 točke.*
- *Drugi korak Gaussovega postopka: 3 točke.*
- *Sklepanje v primeru $\lambda \neq -3$: 3 točke.*
- *Sklepanje v primeru $\lambda = -3$: 3 točke.*

b. (10) Za primer, ko ima sistem več rešitev, napišite vse možne rešitve.

Rešitev: Iz a. sledi, da dobimo več rešitev v primeru $\lambda = -3$. V tem primeru si lahko x_3 poljubno izberemo in z njim izrazimo x_1 in x_2 iz enačb

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & = & 1-2x_3 \\ & & x_2 & = & -2+x_3 \end{array}$$

Dobimo $x_2 = -2 + x_3$ in $x_1 = 1 - x_3$. Vse rešitve sistema so oblike

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je več rešitev za $\lambda = -3$: 2 točki.*
- *Ugotovitev, da x_3 lahko poljubno izberemo: 2 točki.*
- *Izračun x_1 in x_2: 2 točk1.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Vektor v jedru: 2 točki.*