Diferencialne enačbe:

- 1. reda z ločljivima spremenljivkama:

$$y' = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\cdot dx$$

*primer:

$$x = x(t),\ x(0) = 0,\ \alpha < \beta,\ k - konst$$

$$\frac{x'}{(\alpha - x)^2(\beta - x)} = k$$

$$\int \frac{dx}{(\alpha - x)^2(\beta - x)} = \int k\cdot dt \Rightarrow \text{razcep na parcialne}$$

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\int \left(\frac{1}{\beta - x} - \frac{1}{\alpha - x}\right)dx - \frac{1}{\alpha - \beta}\int \frac{dx}{(\alpha - x)^2}$$

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\cdot \log\frac{\beta - x}{\alpha - x} + \frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - x)} = k\cdot t + C =$$

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\cdot \log\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{(\alpha - \beta)\alpha} = C; \qquad x(t) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{(\beta - \alpha)^2}\cdot \log\frac{\frac{\alpha}{2}}{\beta - \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{(\beta - \alpha)\frac{\alpha}{2}} = k\cdot t + \frac{1}{(\alpha - \beta}$$

- nehomogena 1. reda:

gre za dif. enačbo oblike: $y' + f(x)y = g(x)$

najprej nas zanima ,ko je g(x) = 0:

$$y' = -f(x)y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -f(x)$$

$$y_H(x) = C\cdot e^{-\int f(x)dx} \quad -$$

homogena rešitev

potem, ko g(x) ni enak 0: $y_P(x) = C(x)\cdot y_H(x)$

$$y_P(x) = y_H(x)\cdot \int \frac{g(x)}{y_H(x)}dx$$ - partikularna r.

končna rešitev:

$$y(x) = y_P(x) + C\cdot y_H(x)$$ - C določ. iz rob.

* primer:

x = x(t), x(0) = 1 $\quad x' + \frac{t}{1-t^2}x = t$

1. rešimo ustrezno homogeno enačbo:

$$x' + \frac{t}{1-t^2}x = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{dx} = -\int \frac{t\cdot dt}{1-t^2} \Rightarrow x_H =$$

2. poiščemo partikularno rešitev:

$$x_P = \sqrt{1-t^2}\cdot C(t) \Rightarrow x' = \frac{1}{2}\cdot \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot C(t)$$

x_P in x' vstavimo v začetno enačbo in izrazimo C:

$$\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot C(t) + \sqrt{1-t^2}\cdot C'(t) + \frac{t}{1-t^2}\cdot \sqrt{1-t^2}\cdot C(t) = t$$

$$C'(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow C = -\sqrt{1-t^2}$$

$$x_P = \sqrt{1-t^2}\cdot(-\sqrt{1-t^2}) = t^2 - 1$$

3. končna rešitev:

$$x = x_P + x_H = t^2 - 1 + \sqrt{1-t^2}\cdot C$$

iz robnih pogojev: C = 2

$$x = t^2 - 1 + 2\sqrt{1-t^2}$$

- 2. reda s konstantnimi koeficienti:

$$a\cdot y'' + b\cdot y' + c\cdot y = g(x)$$

homogena rešitev → ko je g(x) = 0

$$y(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

i) ko ima 2 rešitvi λ_1 in λ_2 :

$$y = C_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot e^{\lambda_2 x}$$

ii) ko ima 1 rešitev $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

$$y = C_1\cdot e^{\lambda x} + C_2\cdot x\cdot e^{\lambda x}$$

iii) ko ima 2 nerealni rešitvi $\lambda_1 = \mu + i\gamma$ in $\lambda_2 = \mu - i\gamma$

$$y = C_1\cdot e^{\mu x}\cos\gamma x + C_2\cdot e^{\mu x}\sin\gamma x$$

partikularna rešitev:

$$y_P(x) = -y_1(x)\cdot \int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)\cdot g(t)}{W(t)} + y_2(x)\cdot \int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)\cdot g(t)}{W(t)}$$

$$W(x) = y_1(x)\cdot y_2'(x) - y_1'(x)\cdot y_2(x)$$

Vektorji:

- skalarni produkt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b}\cos\alpha$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$$

osnovne lastnosti skalarnega produkta:

$$-(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b})$$

$$-(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$$

$$-(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

pravokotna projekcija: $\vec{p} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})}\cdot \vec{a}$

vektor, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in ima konec na koncu $\vec{b}$:

$$\vec{b}_1 = \vec{b} + \vec{p}$$

enačba za ravnino: Primer:

* Radi bi enačbo za ravnino, ki gre skozi točko in je pravokotna na vektor $\vec{n}$:

$$(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$$

- vektorski produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

lagrangeov izrek: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) \cdot (\vec{b}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{b})^2$

lastnosti vektorskega produkta:

$$-(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$
$$-(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$$
$$-(\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \times \vec{a}$$
$$-(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{b}, \vec{c})\vec{a} + (\vec{a}, \vec{c})\vec{b}$$
$$-((\vec{a} \times \vec{b}), \vec{a}) = 0$$

- <u>mešani produkt</u>

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (-a_1 b_3 + a_3 b_1) c_2 +$$

pravila mešanega produkta:

$$-(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$
$$-(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$
$$-(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{c}, \vec{b})$$

* primer:

Izračunati želimo $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d})$ za poljubne vektorje. Zapišemo lahko:

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{c} \times \vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) = ((\vec{c}$$
$$= (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{b}, \vec{c})$$

Matrike:

- dve matriki istih dimenzij se lahko seštevata
- matriko A lahko množimo s konstanto.
- A + B = B + A
- C (A + B) = CA + CB
- (AB)C = A(BC)

Če je matrika 2×2 dimenzij, lahko izračunamo inverz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- če je: A×B=I, potem je B = A^{-1} $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- *rangi*: Rešitev sistem enačb $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ obstaja, če je : rang (Ar) = rang (A).

če je rang (Ar) > rang (A), potem rešitev ni.
* primer:
imamo nek A in <u>b</u>, ki po gaussovem postopku nastavita tako matriko:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.5 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tukaj je rang (A) = 2, rang (Ar) =2, št. linearno neodvisnih vektorjev: dim (<u>x</u>) – rang (A) = 2

- *lastne vrednosti in lastni vektorji*: A <u>x</u> = λ I <u>x</u> <u>x</u> – last. vektor λ - lastna vrednost

A - λ I = <u>x</u> ➔ $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}$ = <u>x</u> * primer:

A = $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

P(λ) = $(7 - \lambda)^2(4 - \lambda) - 20 - 20 - 25(4 - \lambda) - 4(7 - \lambda) - 4(7 - \lambda) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 72\lambda$
Izračunaš lastne vrednosti, potem pa za vsako še lastni vektor po formuli.