FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

1. december 2000

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Dana naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz - 1\,.$$

a. (10) Pokažite, da na neki okolici U točke $(x_0, y_0) = (1,1)$ obstaja zvezno parcialno odvedljiva funkcija $g\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, taka da je $g(1,1) = -1$ in $f(x,y,g(x,y)) = 0$ za vse $(x,y) \in U$. Izračunajte še $g_x(1,1)$ in $g_y(1,1)$.

Rešitev: Obstoj iskane funkcije nam bo zagotavljal izrek o implicitni funkciji. Zlahka preverimo, da je $f(1,1,-1) = 0$. Preveriti moramo še $f_z(1,1,-1) = -2 \neq 0$. Torej taka funkcija g obstaja na neki okolici (x_0, y_0).

Za izračun parcialnih odvodov uporabimo znani formuli

$$g_x(1,1) = -\frac{f_x(1,1,-1)}{f_z(1,1,-1)} \qquad \textit{in} \qquad g_y(1,1) = -\frac{f_y(1,1,-1)}{f_z(1,1,-1)}\,.$$

Ugotovimo, da je $f_x(1,1,-1) = 0$ in $f_y(1,1,-1) = 0$, torej je $g_x(1,1) = 0$ in $g_y(1,1) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(x_0, y_0, z_0) = 0$: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Formuli za g_x in g_y: 2 točki.*
- *Rezultata: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte Hessovo matriko funkcije g v točki $(1,1)$ in sklepajte, da ima v $(1,1)$ funkcija g lokalni minimum.

Rešitev: Izračunati moramo druge parcialne odvode g_{xx}, g_{xy} in g_{yy}. Enakost $f(x,y,g(x,y)) = 0$ odvajamo dvakrat po x na levi in desni. Dobimo

$$f_x + f_z \cdot g_x = 0$$

in

$$f_{xx} + f_{xz} \cdot g_x + (f_{xz} + f_{zz} \cdot g_x) \cdot g_x + f_z \cdot g_{xx} = 0\,.$$

Ker je $g_x(1,1) = g_y(1,1) = 0$, sledi, da je

$$f_{xx}(1,1,-1) + f_z(1,1,-1) \cdot g_{xx}(1,1) = 0\,,$$

torej $g_{xx}(1,1) = 1$. Podobno dobimo

$$f_{yy}(1,1,-1) + f_z(1,1,-1) \cdot g_{yy}(1,1) = 0\,,$$

torej $g_{yy}(1,1) = 1$. Potrebujemo še $g_{xy}(1,1)$. S posrednim odvajanjem dobimo

$$f_{xy}(1,1,-1) + f_z(1,1,-1) \cdot g_{xy}(1,1) = 0\,,$$

torej $g_{xy}(1,1) = 0$. *Dobimo*

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lastni vrednosti Hessejeve matrike sta očitno pozitivni, zato je dana točka lokalni minimum.

Ocenjevanje:

- *Prvo posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Upoštavanje* $g_x(1,1) = g_y(1,1) = 0$*: 2 točki.*
- *Vsi drugi parialni odvodi: 2 točki.*
- *Pozitivna definitnost Hessejeve matrike in sklep: 2 točki.*

2. (20) Naj bo H telo, ki ga dobimo kot presek krogle s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišču in pokončnim valjem s polmerom $\rho = 1/2$, središčem osnovne ploskve v točki $(1/2, 0, 0)$ in osjo vzporedno osi z. Valj naj ima višino $h = 1$.

a. (10) Izračunajte prostornino opisanega telesa.

Namig: Prostornina je integral funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *po območju* $G = \{(x, y)\colon (x - 1/2)^2 + y^2 \le 1/4\}$. *V polarnih koordinatah to območje preide v* $H = \{(r, \phi)\colon r \le \cos\phi, -\pi/2 \le \phi \le \pi/2\}$.

Rešitev: Računamo integral funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *na območju* $G = \{(x, y)\colon (x - 1/2)^2 + y^2 \le 1/4\}$. *Uvedemo polarne koordinate in dobimo*

$$
\begin{aligned}
V &= \int_G \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{dy} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} \sqrt{1 - r^2}\, r\ \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \left[1 - (1 - \cos^2\phi)^{3/2}\right] \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin(\phi)^3\, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate in Jacobian: 2 točki.*
- *Nove meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

b. (10) Površino dela krogle, ki ga "izreže" valj izračunamo z integralom

$$
\int_G \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,,
$$

kjer je $G = \{(x, y)\colon (x - 1/2)^2 + y^2 \le 1/4\}$. Izračunajte ta integral.

Rešitev: Podobno kot prej uvedemo polarne koordinate. Računamo

$$
\begin{aligned}
P &= \int_G \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}\, r\ \mathrm{d}r \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\, (1 - \sqrt{1 - \cos^2\phi}) \\
&= \pi - 2\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate in Jacobian: 2 točki.*
- *Nove meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bosta $u, v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno parcialno odvedljivi funkciji.

a. (10) Utemeljite, da za vsako območje G v $\mathbb{R}^3$ z gladkim robom velja

$$\int_G \Delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{\partial G} \nabla u \, \mathrm{d}\mathbf{S} \,,$$

kjer je $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Rešitev: Na desni strani je ploskovni integral vektorskega polja $\mathbf{F} = \nabla u$. *Po Gaussovem izreku lahko ta ploskovni integral pretvorimo v trojni integral divergence. Opazimo*

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = (u_x)_x + (u_y)_y + (u_z)_z = \Delta u \,.$$

Trditev zdaj seveda sledi iz Gaussovega izreka.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je* $\mathbf{F} = \nabla u$*: 2 točki.*
- *Izračun divergence: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Uporaba Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Pokažite še, da velja Lagrangeova identiteta

$$\int_G (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{\partial G} (\nabla u \cdot v - u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}\mathbf{S} \,.$$

Namig: Kaj je $\mathrm{div}(\nabla u \cdot v)$ *in* $\mathrm{div}(u \cdot \nabla v)$*?*

Rešitev: Za vektorsko polje $\mathbf{F}$ *si izberimo* $\nabla u \cdot v$*. Računamo*

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathbf{F}) &= (u_x v)_x + (u_y v)_y + (u_z v)_z \\
&= u_{xx} v + u_x v_x + u_{yy} v + u_y v_y + u_{zz} v + u_z v_z \\
&= \Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v \,.
\end{aligned}$$

Podobno dobimo, če si izberemo $\mathbf{G} = u \cdot \nabla v$

$$\mathrm{div}(\mathbf{G}) = u \cdot \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \,.$$

Uporabimo Gaussov izrek posebej za polje $\mathbf{F}$ *in posebej za polje* $\mathbf{G}$*. Dobimo*

$$\int_\partial \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_G (\Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

in podobno

$$\int_\partial \mathbf{G} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_G (u \cdot \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,.$$

Integrala odštejemo in dobimo želeno identiteto.

Ocenjevanje:

- *Divergenca prvega polja: 2 točki.*
- *Divergenca drugega polja: 2 točki.*
- *Uporaba Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Ideja z odštevanjem: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

4. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = g(x)\,.$$

a. (10) Naj bo $g(x) = x$. Poiščite splošno rešitev zgornje eneačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je $P(\lambda) = (\lambda + 1)^3$. Ničla $\lambda = -1$ je trojna, torej so linearno neodvisne rešitve homogene enačbe enake $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ in $y_3 = x^2e^{-x}$. Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $y_p(x) = a + bx$. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$3b + (a + bx) = x\,,$$

torej $b = 1$ in $a = -3$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Linearno neodvisne rešitve: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Splošna reštev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $g(x) = e^{-x}$. Poiščite rešitev diferencialne enačbe pri pogoju $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Rešitev: Linearno neodvisne rešitve homogene enačbe že poznamo. Ker je $\lambda = -1$ trojna rešitev karakterističnega polinoma, bomo iskali partikularno rešitev z nstavkom $y_p(x) = ax^3e^{-x}$. Odvajamo in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$6ae^{-x} = e^{-x}\,,$$

torej je $y_p(x) = x^3e^{-x}/6$. Splošna rešitev bo oblike

$$y(x) = \frac{x^3e^{-x}}{6} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}\,.$$

Določiti moramo še konstante. Iz prve zahteve dobimo $c_1 = 0$, iz druge sledi $c_2 = 0$ in iz tretje $c_3 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

5. (20) Naj bo $x > 0$. Neskončna vrsta

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(k+y)^2 x}$$

konverigira za vse $y \in \mathbb{R}$ enakomerno proti zvezni in zvezno odvedljivi funkciji $\phi(y)$, ki ima periodo enako 1.

a. (10) Pokažite, da velja

$$\int_0^1 \phi(y)\, \cos(2\pi k y)\, \mathrm{d}y = \frac{e^{-\pi k^2/x}}{\sqrt{x}}\,.$$

Utemeljite tudi zamenjavo vrstnega reda seštevanja in integriranja. Pri tem upoštevajte, da velja:

- Če je $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, \mathrm{d}u < \infty$, potem je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \mathrm{d}u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(u)\, \mathrm{d}u\,.$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} \cos(bu)\, \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a)}$.

Rešitev: Ker vrsta konvergira enakomerno za vse $y \in \mathbb{R}$, lahko zamenjamo vrstni red seštevanja in integriranja. Za $n \geq 0$ dobimo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi(y)\, \cos(2\pi n y)\, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(k+y)^2 x} \cos(2\pi n y)\, \mathrm{d}y \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-\pi(k+y)^2 x} \cos(2\pi n y)\, \mathrm{d}y \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-\pi u^2 x} \cos(2\pi n u)\, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2 x} \cos(2\pi n u)\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{-\pi n^2/x}}{\sqrt{x}}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev zamenjave vrstnega reda seštevanja in integriranja: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Upoštevanje prvega namiga: 2 točki.*
- *Upoštevanje drugega namiga: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Utemeljite, da je

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi n^2/x}}{\sqrt{x}} \cos(2\pi n x) .$$

Izpeljite, da za $x > 0$ velja Jacobijeva identiteta

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2/x} .$$

Namig: Vstavite $y = 0$.

Rešitev: Vemo, da je funkcija $\phi(y)$ zvezna in zvezno odvedljiva s periodo 1, zato bo Fourierova vrsta na $[0,1]$ povsod konvergirala proti $\phi(y)$. V a. smo izračunali Fourierov koeficient a_n za vsak n. Izračunati moramo še b_n. Če računamo kot v a., dobimo integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2 x} \sin(2\pi n u)\, du ,$$

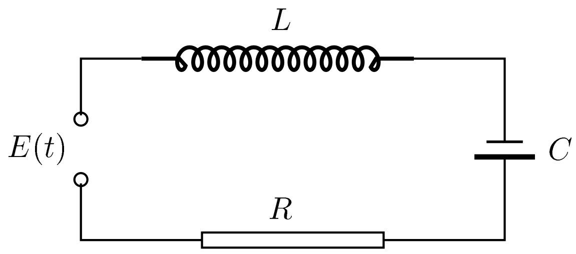
ki je 0 zaradi lihosti sinusa (to sledi tudi iz $\phi(y) = \phi(1-y)$). Vrsta v nalogi je torej Fourierova vrsta za funkcijo $\phi(y)$.

Jacobijevo identiteto dobimo, če v enakost vstavimo $y = 0$.

Ocenjevanje:

- *Lihost: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da je vrsta v nalogi Fourierova vrsta za ϕ: 2 točki.*
- *Vstavljanje $y = 0$: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

6. (20) Tok I v RLC-tokokrogu na sliki 1 opisuje diferencialna enačba



$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = E(t)\,,$$

kjer je $L > 0$ induktivnost tuljave, $R > 0$ upor, $C > 0$ kapaciteta kondenzatorja in E napetost.

a. (10) Predpostavite, da je $E(t) = E_0\sin(\omega t)$ in poiščite partikularno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Uporabimo nastavek $I_p(t) = Ae^{i\omega t}$, kar lahko, ker ničli karakterističnega polinoma zaradi $R > 0$ nista imaginarni. Vstavimo v enačbo in dobimo

$$A(-\omega^2 Le^{i\omega t} + iR\omega e^{i\omega t} + \frac{1}{C}e^{i\omega t}) = E_0 e^{i\omega t}\,.$$

Pokrajšamo in dobimo

$$A(-\omega^2 L + iR\omega + \frac{1}{C}) = E_0\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned} A &= \frac{E_0}{-\omega^2 L + iR\omega + \frac{1}{C}} \\ &= \frac{E_0(-\omega^2 L - iR\omega + \frac{1}{C})}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + R^2\omega^2} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev bo imaginarni del produkta $Ae^{i\omega t}$, torej

$$I_p(t) = \frac{E_0(-R\omega\cos(\omega t) + (-\omega^2 L + \frac{1}{C})\sin(\omega t))}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + R^2\omega^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 2 točki.*
- *Utemeljitev nastavka: 2 točki.*
- *Enačba za A: 2 točki.*

– *Konstanta A: 2 točki.*
– *Partikularna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$. Najdite rešitev enačbe pri začetnih pogojih $I(0) = \dot{I}(0) = 0$. Predpostavite, da je $R^2 - 4L/C < 0$.

Rešitev: Označimo $\delta^2 = -R^2 + 4L/C$. *S temi oznakami sta ničli karakterističnega polinoma enaki* $\lambda_1 = (-R + i\delta)/(2L)$ *in* $\lambda_2 = (-R - i\delta)/(2L)$. *Naj bo* $\gamma = -R/(2L)$ *in* $\theta = \delta/(2L)$. *Splošna rešitev enačbe je*

$$I(t) = I_p(t) + c_1 e^{\gamma t} \cos(\theta t) + c_2 e^{\gamma t} \sin(\theta t)\,.$$

Določiti moramo konstanti c_1 *in* c_2 *tako, da bo zadoščeno začetnima pogojema. Iz prve enačbe sledi*

$$0 = \frac{-E_0 R\omega}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + R^2\omega^2} + c_1\,.$$

Iz druge enačbe dobimo

$$0 = \frac{E_0(-\omega^2 L + \frac{1}{C})\omega}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + R^2\omega^2} + c_1\gamma + c_2\theta\,.$$

Sledi

$$I(t) = I_p(t) + \frac{E_0 R\omega e^{\gamma t}\cos(\theta t)}{(\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + R^2\omega^2} + \frac{-E_0\left((-\omega^2 L + \frac{1}{C})\omega - E_0 R\omega\gamma\right) e^{\gamma t}\sin(\theta t)}{\theta\left((\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + R^2\omega^2\right)}\,.$$

Ocenjevanje:

– *Karakteristični polinom in ničli: 2 točki.*
– *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
– *Splošna rešitev: 2 točki.*
– *Enačbi za* c_1 *in* c_2*: 2 točki.*
– *Končna rešitev: 2 točki.*