FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

28. januar 2002

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y,z) = (1+x)(1+y)(1+z)\,.$$

a. (10) Poiščite možne ektreme funkcije $f(x,y,z)$ pri pogoju $g(x,y,z) = xyz - 1 = 0$ za $x > 0$, $y > 0$ in $z > 0$.

Rešitev: Računamo po Lagrangeu. Sestavimo funkcijo $F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ *in parcialne odvode izenačimo z* 0. *Dobimo enačbe*

$$\begin{aligned} F_x &= (1+y)(1+z) - \lambda yz = 0 \\ F_y &= (1+x)(1+z) - \lambda xz = 0 \\ F_z &= (1+x)(1+y) - \lambda xy = 0 \end{aligned}$$

Ker je $x > 0$, $y > 0$ *in* $z > 0$, *lahko zapišemo*

$$\begin{aligned} \tfrac{1+y}{y}\cdot\tfrac{1+z}{z} - \lambda &= 0 \\ \tfrac{1+x}{x}\cdot\tfrac{1+z}{z} - \lambda &= 0 \\ \tfrac{1+x}{x}\cdot\tfrac{1+y}{y} - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb sledi

$$\frac{1+y}{y}\cdot\frac{1+z}{z} = \frac{1+x}{x}\cdot\frac{1+z}{z}\,,$$

torej

$$\frac{1+y}{y} = \frac{1+x}{x}$$

ali $x = y$. *Podobno iz drugih dveh enačb sledi* $y = z$. *Torej je* $x = y = z$. *Zaradi pogoja* $xyz = 1$ *mora biti* $x = y = z = 1$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Lagrangeom: 2 točki.*
- *Nova funkcija: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Reševanje enačb: 2 točki.*
- *Končna točka: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je Hessejeva matrika funkcije

$$G(x,y) = (1+x)(1+y)(1+\frac{1}{xy})$$

v točki $(1,1)$ pozitivno definitna. Sklepajte, da ste v a. našli res lokalni minimum funkcije $f(x,y,z)$.

Rešitev: Potrebujemo parcialne odvode. Računamo

$$G_{xx}(x,y) = \frac{2\ (1+y)}{x^3\ y}$$

$$G_{xy}(x,y) = 1 + \frac{1}{x^2\ y^2}$$

in

$$G_{yy}(x,y) = \frac{2\,(1+x)}{x\,y^3}\,.$$

Sledi

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zlahka sa prepričamo, da je $H(1,1)$ *pozitivno definitna. Ker je tudi* $G_x(1,1) = 0$ *in* $G_y(1,1) = 0$*, smo v točki* $(1,1)$ *našli lokalni minimum funkcije* $G(x,y)$*. Ker je* $F(x,y,z)$ *pri pogoju* $xyz = 1$ *enak* $G(x,y)$*, je točka* $(1,1,1)$ *lokalni minimum funkcije* $F(x,y,z)$ *pri pogoju* $xyz = 1$.

Ocenjevanje:

- *Definicija Hessejeve martike: 2 točki.*
- G_{xx} *in* G_{xy}*: 2 točki.*
- G_{xy}*: 2 točki.*
- *Pozitivna definitnost: 2 točki.*
- *Povezava z a.: 2 točki.*

2. (20) Naj bo za nek $\rho \in (-1,1)$ funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana z

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\; e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} .$$

a. (10) Naj bo neskončno območje dano z $G = \{(x,y)\colon x \geq 0, y \geq 0\}$. Pokažite, da je

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin(\rho)\,.$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate. Dobimo

$$\begin{aligned}
\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\int_0^\infty e^{-\frac{r^2(1-\rho\sin 2\phi)}{2(1-\rho^2)}}\,r\,\mathrm{d}r\\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\,\frac{1-\rho^2}{1-\rho\sin 2\phi}\\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{1}{\cos^2\phi}}{\frac{1}{\cos^2\phi}-2\rho\mathrm{tg}\phi}\,\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{1+v^2-2\rho v}\,\mathrm{d}v\\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{(v-\rho)^2+1-\rho^2}\,\mathrm{d}v\\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{v-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\Big|_0^\infty\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}})\right)\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin(\rho)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s polarnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Meje in Jacobian: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Zunanji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je

$$\int_{\mathbb{R}^2} xy\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,.$$

Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2t}{(1-\rho\sin 2t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\,\pi\,\rho}{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

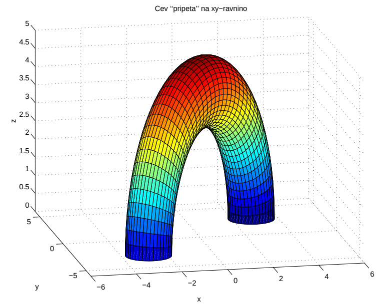
Rešitev: Spet uvedemo polarne koordinate. Računamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{2\pi} \sin\phi\cos\phi\, \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} r^2\, e^{-\frac{r^2(1-\rho\sin 2\phi)}{2(1-\rho^2)}}\, r\, \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{2\pi} 2\sin\phi\cos\phi\, \mathrm{d}\phi\, \frac{(1-\rho^2)^2}{(1-\rho\sin 2\phi)^2} \\
&= \frac{(1-\rho)^{3/2}}{2\pi}\, \frac{2\,\pi\,\rho}{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \rho\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s polarnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Jacobian in meje: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Zunanji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Cev s konstantnim polmerom a je v prostoru upognjena tako, da sta končni krožnici "prilepljeni" na xy-ravnino kot na sliki 1.



Sl. 1 Cev s končnima krožnicama prilepljenima na xy-ravnino.

a. (10) Naj bo vektorsko polje dano z $\mathbf{F} = (-x, -y, 2z)$. Izračunajte pretok tega polja skozi stene cevi (brez krogov v xy-ravnini).

Rešitev: Najprej izračunamo

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = -1 - 1 + 2 = 0\,.$$

Če pretoku skozi stene cevi dodamo pretok skozi kroga v xy-ravnini, je po Gaussovem izreku pretok skozi tako dobljeno zaključeno ploskev enak 0. Pretok skozi kroga pa je tudi enak 0, saj je normala na kroga enaka $-\mathbf{k}$, z-koordinata vektorskega polja $\mathbf{F}$ pa je na xy-ravnini enaka 0. Celoten pretok je torej enak 0.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Ideja z dodajanjem ploskev: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Uporaba Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (-y(z+1), x(z+1), z^2)$. Za normalo na ploskev si izberite vektor, ki kaže iz cevi. Izračunajte pretok $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ skozi površino cevi.

Rešitev: Izračunamo $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (-x, -y, 2(z+1))$. Divergenca rotorja je vedno enaka 0. Če kot v a. cev "zapremo" s krogoma v ravnini, je pretok skozi tako nastalo zaključeno ploskev enak 0. Pretok skozi dodani ploskvi je enak $-4\pi a^2$, ker je z-koordinata polja $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ enaka 2, normala pa $-\mathbf{k}$. Pretok $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ skozi stene cevi je $4\pi a^2$.

Ocenjevanje:

- *Rotor: 2 točki.*
- *Idela z Gaussom in zapiranjem ploskve: 2 točki.*
- *Pretok rotorja: 2 točki.*
- *Citiranje in uporaba Stokesa: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Gibanje planeta okrog sonca si lahko mislimo kot gibanje v xy-ravnini, kjer je sonce v izhodišču. To gibanje lahko opišemo s funkcijo $r(\phi)$, kjer je ϕ kot med osjo x in daljico, ki povezuje planet in izhodišče, r pa razdalja planeta od izhodišča. Funkcija $y(\phi) = 1/r(\phi)$ zadošča diferencialni enačbi

$$y' = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2},$$

kjer sta ϵ in p konstanti, odvisni od mas planetov in gravitacijske konstante.

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Diferencialno enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2}} = 1\,.$$

Označimo $\epsilon^2/p^2 = a^2$ *in integriramo. Uporabili bomo tudi novo spremenljivko* $av = y - 1/p$. *Računamo*

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &= \arcsin(v) \\ &= \arcsin(\frac{1}{a}(y - \frac{1}{p}))\end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$\arcsin(\frac{1}{a}(y - \frac{1}{p})) = \phi + c$$

ali

$$\frac{1}{a}(y - \frac{1}{p}) = \sin(\phi + c)$$

ali

$$y(\phi) = \frac{1}{p} + a\sin(\phi + c)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za enačbo z ločljivima spremenljivkama: 2 točki.*
- *Prepisovanje v obliko primerno za integriranje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevanje integracijske konstante: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Rešite zgornjo enačbo pri začetnem pogoju $y(0) = 1/p + \epsilon/p$.

Rešitev: V splošni rešitvi iz a. moramo določiti konstanto c. Veljati mora

$$\frac{1}{p} + a = \frac{1}{p} + a\sin(c)\,.$$

Sledi, da mora biti

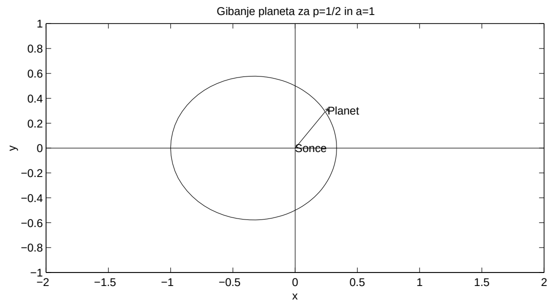
$$\sin(c) = 1$$

ali

$$c = \frac{\pi}{2}\,.$$

Rešitev enačbe je torej

$$y(\phi) = \frac{1}{p} + a\cos(\phi)\,.$$



Sl. 2 Gibanje planeta kot rešitev diferencialne enačbe. Dobimo Keplerjev zakon.

Ocenjevanje:

- *Prepis splošne rešitve: 2 točki.*
- *Vstavljanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Enačba za c: 2 točki.*
- *Konstanta c: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

5. (20) Hessejev nelinearni sistem diferencialnih enačb je dan z

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + xz \\ \dot{y} &= x + yz \\ \dot{z} &= x + z^2 \end{aligned}$$

Poiskati želimo rešitev tega sistema pri danih začetnih pogojih.

a. (10) Naj bo

$$x(t) = \frac{u(t)}{T(t)}, \quad y(t) = \frac{v(t)}{T(t)} \quad \text{in} \quad z(t) = \frac{w(t)}{T(t)}$$

za funkcije u, v, w in T, ki ustrezajo enačbam

$$\dot{u} = v\,, \quad \dot{v} = u\,, \quad \dot{w} = u \quad \text{in} \quad \dot{T} = -w\,.$$

Pokažite, da potem funkcije x, y in z rešijo prvotni sistem enačb.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{\dot{u}T - u\dot{T}}{T^2} \\ \dot{y} &= \tfrac{\dot{v}T - v\dot{T}}{T^2} \\ \dot{z} &= \tfrac{\dot{w}T - w\dot{T}}{T^2} \end{aligned}$$

Vstavimo v sistem enačb za funkcije x, y in z in pomnožimo s T^2. Dobimo

$$\begin{aligned} \dot{u}T - u\dot{T} &= vT + uw \\ \dot{v}T - v\dot{T} &= uT + vw \\ \dot{w}T - w\dot{T} &= uT + w^2 \end{aligned}$$

Če upoštevamo povezave med funkcijami in njihovimi odvodi, se prepričamo, da funkcije x, y in z rešijo prvotni sistem enačb.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je potrebno odvajati kvociente: 2 točki.*
- *Odvajanje kvocientov: 2 točki.*
- *Vstavljanje v sistem: 2 točki.*
- *Urejanje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev prvotnega nelinearnega sistema pri začetnem pogoju $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Rešitev: Funkcije u, v, w in T ustrezajo sistemu linearnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u \\ \dot{w} &= u \\ \dot{T} &= -w \end{aligned}$$

Če zahtevamo še $u(0) = v(0) = w(0) = T(0) = 1$, bomo ustregli tudi začetnemu pogoju prvotne enačbe. Opazimo, da prvi dve enačbi vsebujeta le u in v. Karakteristični polinom tega linearnega sistema ima ničli $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$ s pripadajočima lastnima vektorjema $\mathbf{x}_1 = (1, 1)$ in $\mathbf{x}_2 = (1, -1)$. Začetnemu pogoju *ustreza rešitev* $(u, v) = (e^t, e^t)$. *Sledi, da je* $w = ce^t$. *Zaradi začetnega pogoja* $w(0) = 1$, *je* $w = e^t$. *Zlahka se tudi prepričamo, da je* $T = 2 - e^t$. *Sledi*

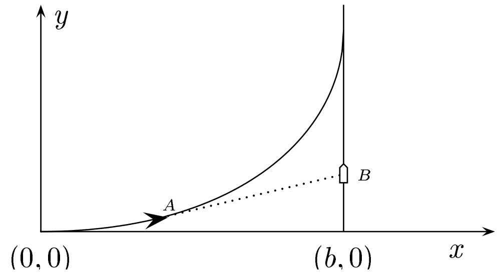
$$\begin{aligned} x &= \tfrac{e^t}{2-e^t} \\ y &= \tfrac{e^t}{2-e^t} \\ z &= \tfrac{e^t}{2-e^t} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da dobimo linearni sistem enačb: 2 točki.*
- *Opažanje, da previ dve vrsti vsebujeta le u in v: 2 točki.*
- *Rešitev za u in v pri danih začetnih pogojih: 2 točki.*
- *Rešitev za w in t: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki. in dobimo*

6. (20) Ladja B potuje po premici vzporedni osi y s konstantno hitrostjo β. V trenutku $t = 0$ je ladja v točki $(b, 0)$. V trenutku $t = 0$ iz točke $(0, 0)$ vzleti letalo, ki potuje s konstantno hitrostjo $\alpha > \beta$ tako, da je vedno obrnjeno točno proti ladji kot na sliki 2. Letalo bo potovalo po grafu funkcije $f(x)$. Označite $w(x) = f'(x)$. Funkcija $w(x)$ ustreza diferencialni enačbi

$$w' = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{1+w^2}}{x-b}\,.$$



Sl. 3 Pot letala A med zasledovanjem ladje B.

a. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe za w na intervalu $[0, b]$. Začetni pogoj je $w(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{w'}{\sqrt{1+w^2}} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{x-b}\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\operatorname{arcsinh}(w) = -\frac{\beta}{\alpha}\log(b-x) + c\,.$$

Za $x = 0$ je $w(0) = 0$, zato mora konstanta c v splošni rešitvi ustrezati pogoju

$$0 = -\frac{\beta}{\alpha}\log(b) + c$$

ali

$$c = \frac{\beta}{\alpha}\log(b)\,.$$

Sledi

$$\operatorname{arcsinh}(w) = \log\left(\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha}\right),$$

torej

$$w(x) = \frac{1}{2}\left((1-\frac{x}{b})^{-\beta/\alpha} - (1-\frac{x}{b})^{\beta/\alpha}\right).$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Enačba za konstanto: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte v kolikšnem času bo letalo ujelo ladjo.

Namig: y-koordinata ladje, ko jo bo ujelo letalo, bo $\int_0^b w(x)\mathrm{d}x$.

Rešitev: Sledimo namigu. Če poznamo y-koordinato ladje v trenutku t_0*, ko jo bo dohitelo letalo, lahko izračunamo, koliko časa je plula. Označimo y-koordinato z* y_0*. Veljati mora* $\beta t_0 = y_0$*. Po namigu je*

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \int_0^b w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^b \left((1-\frac{x}{b})^{-\beta/\alpha} - (1-\frac{x}{b})^{\beta/\alpha}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{b}{2}\left[\frac{-(1-\frac{x}{b})^{-\beta/\alpha+1}}{-\beta/\alpha+1} + \frac{(1-\frac{x}{b})^{\beta/\alpha+1}}{\beta/\alpha+1}\right]_0^b \\
&= \frac{b}{2}\left[\frac{-\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha}{\beta+\alpha}\right] \\
&= \frac{b\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\,.
\end{aligned}
$$

Iskani čas je torej

$$t_0 = \frac{b\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Upoštevanje namiga: 2 točki.*
- *Vstavljanje funkcije: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Vstavljanje mej: 2 točki.*
- *Čas: 2 točki.*