FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

14. januar 2002

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirana na množici $U = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1\}$, naj bo dvakrat zvezno odvedljiva in naj ustreza enačbi

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0 \, .$$

Funkcija $g \colon V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ naj bo na $V = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 > 1\}$ definirana z

$$g(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) .$$

a. (10) Označite

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{in} \qquad v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \, .$$

Pokažite, da je

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0 \, ,$$

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

in

$$u_x v_x + u_y v_y = 0 \, .$$

Rešitev: Računamo

$$u_x = \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \, .$$

Odvajamo še enkrat po x.

$$u_{xx} = \frac{2\,(x^3 - 3\,x\,y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \, .$$

Podobno dobimo

$$u_y = \frac{-2\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

in

$$u_{yy} = \frac{-2\,x\,(x^2 - 3\,y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \, .$$

S seštevanjem sledi

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \, .$$

Zaradi simetrije mora biti tudi $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Računamo

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= \frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^4} + \frac{4\,x^2\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^4} \\ &= \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, . \end{aligned}$$

Zaradi simetrije je seveda tudi $v_x^2 + v_y^2 = (x^2+y^2)^{-2}$. *Upoštevamo še*

$$v_x = \frac{-2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}$$

in

$$v_y = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Sledi

$$u_x v_x + u_y v_y = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Parcialno odvajanje u: 2 točki.*
- *Preurejanje in 1. sklep: 2 točki.*
- *Preurejanje in 2, sklep: 2 točki.*
- *3. sklep: 2 točki.*
- *Uporaba simetrije: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = 0\,.$$

Rešitev: Funkcijo g zapišimo kot sestavljeno funkcijo oblike

$$g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

in odvajajmo po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij. Dobimo

$$g_x = f_u u_x + f_v v_x$$

in s ponovnim odvajanjem po x

$$g_{xx} = (f_{uu}u_x + f_{uv}v_x)u_x + f_u u_{xx} + (f_{uv}u_x + f_{vv}v_x)v_x + f_v v_{xx}\,.$$

Podobno dobimo

$$g_{yy} = (f_{uu}u_y + f_{uv}v_y)u_y + f_u u_{yy} + (f_{uv}u_y + f_{vv}v_y)v_y + f_v v_{yy}\,.$$

Preuredimo

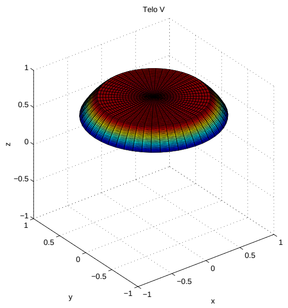
$$\begin{aligned} & g_{xx} + g_{yy} \\ & \quad = f_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + f_{vv}(v_x^2 + v_y^2) \\ & \qquad +2 f_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) \\ & \qquad\quad + f_u(u_{xx} + u_{yy}) + f_v(v_{xx} + v_{yy})\,. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem enačbe $f_{uu} + f_{vv} = 0$ *in enakosti iz a. sledi* $\Delta g = 0$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za sestavljeno funkcijo: 2 točki.*
- *Prvo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Preurejanje členov: 2 točki.*
- *Upoštevanje a. in rezultat: 2 točki. in dobimo*

2. (20) Telo V naj bo rezina krogle $K = \{(x,y,z) \colon x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ med višinama $z=a$ in $z=b$ za $0<a<b<1$. Telo je prikazano na sliki 1.



Sl. 1 Rezina krogle med višinama $z=a$ in $z=b$.

a. (10) Predpostavite, da je masna gostota telesa konstantno enaka ρ. Izračunajte masni vztrajnostni moment telesa V okrog osi z.

Rešitev: Z uvedbo cilindričnih koordinat računamo

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \rho \int_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_a^b \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^2\, r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{4}\pi\rho \int_a^b (1-z^2)^2 \mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{4}\pi\rho\,(z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^5}{5})\Big|_a^b \\ &= \frac{\pi\rho}{2}\,((b-a) - \frac{2(b^3-a^3)}{3} + \frac{b^5-a^5}{5})\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s cilindričnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še površino plašča rezine krogle (brez krogov, ki jih "odrežeta" ravnini $z=a$ in $z=b$).

Namig: Parametrizirajte ploskev s $\Phi(\phi,z) = (\sqrt{1-z^2}\cos\phi, \sqrt{1-z^2}\sin\phi, z)$.

Rešitev: Sledimo namigu. Za parametra bo veljalo $0 \le \phi \le 2\pi$ *in* $a \le z \le b$. *Računamo*

$$\Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-z^2}\sin\phi \\ \sqrt{1-z^2}\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad \Phi_z = \begin{pmatrix} -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\phi \\ -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\Phi_\phi \times \Phi_z = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}\cos\phi \\ \sqrt{1-z^2}\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

ali

$$|\Phi_\phi \times \Phi_z| = 1 - z^2 + z^2 = 1\,.$$

Površina je $2\pi(b-a)$.

Ocenjevanje:

- *Območje za parametre: 2 točki.*
- Φ_ϕ*: 2 točki.*
- Φ_z*: 2 točki.*
- $|\Phi_\phi \times \Phi_z|$*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Za dvakrat zvezno odvedljivo vektorsko polje $\mathbf{F}$ naj velja $\mathbf{F} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{F}) = 0$.

a. (10) Na bo $\mathcal{S}$ gladka ploskev z gladkim robom $\partial\mathcal{S}$, na kateri je $\mathbf{n} = \phi\mathbf{F}$ za neko gladko skalarno funkcijo ϕ. Pokažite, da je

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$$

Rešitev: Po Stokesovem izreku je

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Na ploskvi $\mathcal{S}$ je po predpostavkah $\mathbf{n} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{F}) = 0$, zato bo $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ vedno vzporeden ploskvi $\mathcal{S}$. Pretok bo tako enak 0.

Ocenjevanje:

- *Prepis s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Ugotovitev, da je $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ pravokoten na $\mathbf{n}$: 2 točki.*
- *Sklep, da je $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ vzporeden ploskvi: 2 točki.*
- *Sklep, da je pretok 0: 2 točki.*
- *Sklep, da je krivuljni integral enak 0: 2 točki.*

b. (10) Na bo $\mathcal{S}$ spet gladka ploskev z gladkim robom $\partial\mathcal{S}$, na kateri je $\mathbf{n} = \phi\mathbf{F}$ za neko gladko skalarno funkcijo ϕ. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \times \mathbf{rot}(\mathbf{F}))\,\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Rešitev: Vektor $\mathbf{F} \times \mathbf{rot}(\mathbf{F})$ bo pravokoten na $\mathbf{n}$, torej tangenten na ploskev $\mathcal{S}$. Rezultat je 0.

Ocenjevanje:

- *Poljubna smiselna razlaga: 10 točk.*

4. (20) Funkcija y naj zadošča Bernoullijevi enačbi

$$y' + xy = x\sqrt{y}\,.$$

a. (10) Naj bo $z(x) = \sqrt{y(x)}$ Pokažite, da funkcija z ustreza enačbi

$$2z' + xz = x\,.$$

Rešitev: Izračunamo $z' = y'/2\sqrt{y}$. Vstavimo v enačbo $y' = 2z'z$ in dobimo

$$2z'z + xz^2 = xz\,.$$

Po krajšanju z z sledi zgornja enačba.

Ocenjevanje:

- *Odvod z: 2 točki.*
- *Izražava y' z z in z': 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe

$$y' + xy = x\sqrt{y}$$

pri začetnem pogoju $y(0) = 4$.

Rešitev: Začetni pogoj za funkcijo y se prevede v začetni pogoj $z(0) = 2$. Enačba za z je linearna nehomogena enačba prvega reda. Rešitev homogenega dela je

$$z_h(x) = ce^{-x^2/4}$$

za poljubno konstanto c. Potrebujemo še partikularno rešitev. To iščemo z nastavkom $z(x) = c(x)e^{-x^2/4}$. Z odvajanjem in vstavljanjem dobimo

$$2(c'z_h + cz_h') + xcy_h = x\,.$$

Sledi

$$c' = \frac{x}{2}e^{x^2/4}\,,$$

torej

$$c(x) = e^{x^2/4}\,.$$

Sledi

$$z_p(x) = 1\,.$$

Splošna rešitev bo

$$z(x) = 1 + ce^{x^2/4}\,.$$

Začetnemu pogoju bo zadoščeno, če bo $c = 1$. Ker je $y = z^2$, bo

$$y(x) = (1 + e^{x^2/4})^2\,.$$

Ocenjevanje:

- *Rešitev homogenega dela: 2 točki.*
- *Nastavek za nehomogeni del: 2 točki.*
- *Enačba za c in c: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

5. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y^{(4)} - y = g(x)\,.$$

a. (10) Poiščite linearno neodvisne rešitve homogenega dela zgornje enačbe.

Rešitev: Najprej izračunamo karakteristični polinom. Dobimo

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)\,.$$

Linearno neodvisne rešitve so $\cosh x$, $\sinh x$, $\cos x$ *in* $\sin x$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Realni ničli: 2 točki.*
- *Imaginarni ničli: 2 točki.*
- *Prvi par neodvisnih rešitev: 2 točki.*
- *Drugi par neodvisnih rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite splošno rešitev enačbe, če je $g(x) = \cosh x \cos x + \sinh x \sin x$.

Rešitev: Na desni so členi oblike $e^x \cos x$, $e^{-x} \cos x$, $e^x \sin x$ *in* $e^{-x} \sin x$. *Desno stran zamenjamo z* $e^{(1+i)x}$. *Ker* $1 + i$ *ni ničla karakterističnega polinoma, bo partikularna rešitev oblike* $y_p = Ae^{(1+i)x}$ *za kompleksno število* A. *Vstavimo v enačbo in dobimo*

$$A(1+i)^4 e^{(1+i)x} - Ae^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}\,.$$

Pokrajšamo in dobimo enačbo

$$A((1+i)^4 - 1) = 1\,.$$

Računamo

$$(1+i)^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 - 1 = -5\,,$$

torej $A = -1/5$. *Podobno dobimo za* $e^{-x} \cos x$ *z nastavkom* $y_p = Be^{(-1+i)x}$ *enačbo*

$$B((-1+i)^4 - 1) = 1\,,$$

torej $B = -1/5$. *Razberemo, da je partikularna rešitev za prvi člen na desni enaka*

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} \cosh x \cos x\,.$$

Podobno razberemo tudi partikularno rešitev za drugi člen na desni. Celotna partikularna rešitev je torej

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}(\cosh x \cos x + \sinh x \sin x)\,.$$

Splošna rešitev bo

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}(\cosh x \cos x + \sinh x \sin x) + c_1 \cosh x + c_2 \sin x + c_3 \cos x + c_4 \sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da rešujemo za vsak člen na desni posebej: 2 točki.*
- *Nastavek: 2 točki.*
- *Vstavljanje nastavka v enačbo: 2 točki.*
- *A in B: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

6. (20) Na majhni višini nad površjem zemlje velja ob upoštevanju Coriolisovega pospeška za hitrost $\mathbf{v}$ prosto padajočega telesa enačba

$$\dot{\mathbf{v}} = -2\mathbf{w} \times \mathbf{v} - \mathbf{b}\,,$$

kjer je $\mathbf{w}$ vektorska kotna hitrost vrtenja zemlje in je $\mathbf{b} = (0,0,g)$ (g zemeljski pospešek). Po komponentah lahko enačbo zapišemo kot

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2w_3 & -2w_2 \\ -2w_3 & 0 & 2w_1 \\ 2w_2 & -2w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

a. (10) Označite $\omega^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$. Pokažite, da so $\mathbf{y}_1 = \mathbf{w}$,

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} w_1 w_3 \cos 2\omega t + w_2 \omega \sin 2\omega t \\ w_2 w_3 \cos 2\omega t - w_1 \omega \sin 2\omega t \\ -(w_1^2 + w_2^2) \cos 2\omega t \end{pmatrix} \text{ in } \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} w_1 w_3 \sin 2\omega t + w_2 \omega \cos 2\omega t \\ w_2 w_3 \sin 2\omega t - w_1 \omega \cos 2\omega t \\ -(w_1^2 + w_2^2) \sin 2\omega t \end{pmatrix}$$

linearno neodvisne rešitve homogenega dela sistema.

Rešitev: Najprej potrebujemo lastne vrednosti matrike sistema, torej

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2w_3 & -2w_2 \\ 2w_3 & -\lambda & 2w_1 \\ 2w_2 & -2w_1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Z nekaj računanja sledi

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)\,.$$

Označimo $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = \omega^2$. Ničle karakterističnega polinoma so $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i\omega$ in $\lambda_3 = -2i\omega$. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_1, je kar $\mathbf{w}$. Prva rešitev bo

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{w}\,.$$

Potrebujemo še dve linearno neodvisni rešitvi. Ti bomo dobili kot realni in imaginarni del vektorja $(\cos 2\omega t + i \sin 2\omega t)\mathbf{z}$, kjer je $\mathbf{z}$ lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_2. Dobimo

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} w_1 w_3 - i\omega w_2 \\ w_2 w_3 + i\omega w_1 \\ -w_1^2 - w_2^2 \end{pmatrix}.$$

Iz tega razberemo linearno neodvisni rešitvi.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Lastni vektorji: 2 točki.*
- *Prva rešitev: 2 točki.*
- *Ostali dve linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je

$$\mathbf{v} = -\frac{g}{\omega^2}\int_0^t (w_3\,\mathbf{w} - \mathbf{y}_2)\,\mathrm{d}s$$

rešitev sistema, ki ustreza začetnemu pogoju $\mathbf{v}(0) = 0$. Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_0^t (\mathbf{w} \times \mathbf{y}_2)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\mathbf{y}_2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_1w_3 \\ w_2w_3 \\ -w_1^2 - w_2^2 \end{pmatrix} .$$

Rešitev: Enačbo preverimo direktno. Najprej lahko opazimo, da je

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{g}{\omega^2}\,(w_3\,\mathbf{w} - \mathbf{y}_2)\ .$$

Izračunajmo še $-2\mathbf{w} \times \mathbf{v} - \mathbf{b}$. *Dobimo*

$$\begin{aligned}
& -2\mathbf{w} \times -\frac{g}{\omega^2}\int_0^t (w_3\,\mathbf{w} - \mathbf{y}_2)\,\mathrm{d}s - \mathbf{b} \\
= \;& \frac{2g}{\omega^2}\int_0^t (w_3\,\mathbf{w} \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \mathbf{y}_2)\,\mathrm{d}s - \mathbf{b} \\
= \;& -\frac{2g}{\omega^2}\int_0^t \mathbf{w} \times \mathbf{y}_2\,\mathrm{d}s - \mathbf{b} \\
= \;& -\frac{2g}{\omega^2}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}_2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_1w_3 \\ w_2w_3 \\ -w_1^2 - w_2^2 \end{pmatrix}\right) - \mathbf{b} \\
= \;& \frac{g}{\omega^2}\left(\mathbf{y}_2 - \begin{pmatrix} w_1w_3 \\ w_2w_3 \\ -w_1^2 - w_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 \end{pmatrix}\right) \\
= \;& -\frac{g}{\omega^2}\,(w_3\mathbf{w} - \mathbf{y}_2)\ .
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z direktnim preverjanjem: 2 točki.*
- *Odvod* $\mathbf{v}$ *: 2 točki.*
- *Zamenjava integrala in vektorskega produkta: 2 točki.*
- *Upoštevanje namiga: 2 točki.*
- *Preverjanje začetnega pogoja: 2 točki.*