FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

26. januar 2004

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dana števila. Definirajte funkcijo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \,.$$

Privzemite, da velja

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije $f(a,b)$ in jih klasificirajte.

Rešitev: Izračunamo parcialna odvoda po a in po b in ju izenačimo z 0*. Dobimo*

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i) = 0$$

in

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - bx_i)x_i = 0\,.$$

Prepišemo

$$\begin{array}{rcccl} na & + & b\sum_{i=1}^n x_i & = & \sum_{i=1}^n y_i \\ a\sum_{i=1}^n x_i & + & b\sum_{i=1}^n x_i^2 & = & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$

Označimo

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n \quad s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i/n \quad \textit{in} \quad s_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2/n\,.$$

Rešimo enačbe in dobimo

$$b = \frac{s_{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x^2 - \bar{x}^2} \qquad \textit{in} \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}\,.$$

Izračunamo še druge parcialne odvode po a in po b. Dobimo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) = 2n\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) = 2ns_x^2 \quad \textit{in} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}(a,b) = 2n\bar{x}\,.$$

Determinanta Hessove matrike je

$$4n^2(s_x^2 - \bar{x}^2) = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0\,.$$

Matrika je pozitivno definitna, tako da je dana točka lokalni minimum.

Ocenjevanje:

- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*

- *Enačbi za a in b: 2 točki.*
- *Rešitve: 2 točki.*
- *Drugi parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Hessejeva matrika in sklep: 2 točki.*

b. (10) Poiščite možne ektreme funkcije $f(a,b)$ pri pogoju $a+b=1$.

Rešitev: Po Lagrangu sestavimo novo funkcijo

$$F(a,b) = f(a,b) - \lambda(a+b)\,.$$

Parcialna odvoda po obeh spremenljivkah izenačimo z 0 *in dobimo enačbe*

$$\begin{array}{ccccc} na & + & b\sum_{i=1}^n x_i & = & \sum_{i=1}^n y_i + \lambda \\ a\sum_{i=1}^n x_i & + & b\sum_{i=1}^n x_i^2 & = & \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda \end{array}$$

Podobno kot v točki a. dobimo

$$b = \frac{(s_{xy} + \lambda/n) - \bar{x}(\bar{y} + \lambda/n)}{s_x^2 - \bar{x}^2} \qquad in \qquad a = (\bar{y} + \lambda/n) - b\bar{x}\,.$$

Izbrati moramo tak λ, da bo veljalo $a+b=1$. Označimo $\mu = \lambda/n$ in $s_x^2 - \bar{x}^2 = d$. Drugi enačbi na levi in desni prištejemo b in dobimo

$$a + b = \frac{d\bar{y} - s_{xy} + \bar{x}\bar{y} + \mu(d - 1 - \bar{x})}{d}\,.$$

Sledi

$$\mu = \frac{d(1-\bar{y}) - s_{xy} - \bar{x}\bar{y}}{1 - d - \bar{x}}\,.$$

Z vstavljanjem v formuli za a in b dobimo želeno rešitev.

Ocenjevanje:

- *Lagrangova funkcija: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Enačbi za a, b in λ: 2 točki.*
- *Uporaba stranskega pogoja: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

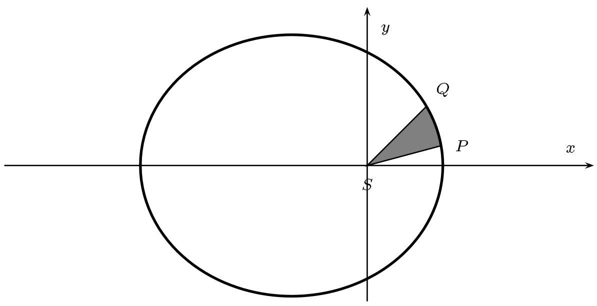
2. (20) Po 1. Keplerjevem zakonu so orbite planetov elipse z goriščem v soncu. Če si izberemo koordinatni sistem tako, da je sonce v izhodišču, lahko orbito opišemo v polarnih koordinatah z

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\phi},$$

pri čemer je $p > 0$ parameter elipse, $\epsilon^2 \in (0,1)$ pa njena ekscentričnost. Po 3. Keplerjevem zakonu je čas potovanja planeta od točke P do točke Q na sliki 1 enak

$$T_{PQ} = \frac{2A_{PQ}}{\sqrt{kpM}},$$

kjer je k gravitacijska konstanta in M masa sonca, A_{PQ} pa je ploščina osenčenega lika na sliki 1.



Sl. 1 Orbita planeta okrog sonca S.

a. (10) Izračunajte čas potovanja planeta od točke P do točke Q, če daljica $\overline{SP}$ z x-osjo oklepa kot ϕ_1, daljica $\overline{SQ}$ pa kot ϕ_2, kjer je $0 < \phi_1 < \phi_2 < \pi/2$. Kot znano privzemite, da je

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+t^2)^2} = \frac{t}{2\,a^2\,(a^2+t^2)} + \frac{\operatorname{arctg}(\frac{t}{a})}{2\,a^3}.$$

Rešitev: Računamo s uporabo polarnih koordinat.

$$\begin{aligned}
A_{PQ} &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathrm{d}\phi \int_0^{p/(1+\epsilon\cos\phi)} r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{p^2\,\mathrm{d}\phi}{(1+\epsilon\cos\phi)^2} \\
&= \frac{p^2}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\cos^2\phi(\frac{1}{\cos^2\phi}+\epsilon)^2} \\
&= \frac{p^2}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\cos^2\phi(1+\operatorname{tg}^2\phi+\epsilon)^2} \\
&= \frac{p^2}{2}\int_{\operatorname{tg}\phi_1}^{\operatorname{tg}\phi_2} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2+\epsilon)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p^2}{2}\left(\frac{t}{2\,(1+\epsilon)\,\left((1+\epsilon)+t^2\right)} + \frac{\operatorname{arctg}(\frac{t}{\sqrt{1+\epsilon}})}{2\,(1+\epsilon)^{3/2}}\right)\Bigg|_{t=\operatorname{tg}\phi_1}^{t=\operatorname{tg}\phi_2} \\
&= \frac{p^2}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\phi_2}{2\,(1+\epsilon)\,\left((1+\epsilon)+\operatorname{tg}^2\phi_2\right)} + \frac{\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}\phi_2}{\sqrt{1+\epsilon}})}{2\,(1+\epsilon)^{3/2}} - \right. \\
&\qquad \left. -\frac{\operatorname{tg}\phi_1}{2\,(1+\epsilon)\,\left((1+\epsilon)+\operatorname{tg}^2\phi_1\right)} + \frac{\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}\phi_1}{\sqrt{1+\epsilon}})}{2\,(1+\epsilon)^{3/2}}\right).
\end{aligned}
$$

Potrebni čas T_{PQ} dobimo z vstavljanjem v formulo dano v besedilu naloge.

Ocenjevanje:

- *Ideja za računanje ploščine: 2 točki.*
- *Polarne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte čas, ki ga potrebuje planet, da enkrat obkroži sonce.

Rešitev: Izračunati moramo ploščino elipse. Računamo

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{p/(1+\epsilon\cos\phi)} r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{p^2\,\mathrm{d}\phi}{(1+\epsilon\cos\phi)^2} \\
&= \frac{p^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\cos^2\phi(1+\operatorname{tg}^2\phi+\epsilon)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Pri tem zadnjem integralu moramo biti previdni in računanje razdeliti na korake po intervalih $[0.\pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/2]$ in $[3\pi/2, 2\pi]$. Dobimo po vrsti

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\cos^2\phi(1+\operatorname{tg}^2\phi+\epsilon)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2\,(1+\epsilon)\,\left((1+\epsilon)+t^2\right)} + \frac{\operatorname{arctg}(\frac{t}{\sqrt{1+\epsilon}})}{2\,(1+\epsilon)^{3/2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \frac{\pi}{8(1+\epsilon)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\cos^2\phi(1+\operatorname{tg}^2\phi+\epsilon)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2\,(1+\epsilon)\,\left((1+\epsilon)+t^2\right)} + \frac{\operatorname{arctg}(\frac{t}{\sqrt{1+\epsilon}})}{2\,(1+\epsilon)^{3/2}}\right)\Bigg|_{t=-\infty}^{t=\infty} \\
&= \frac{\pi}{4(1+\epsilon)^{3/2}}\,.
\end{aligned}
$$

Integral po intervalu $[3\pi/2, 2\pi]$ *je enak prvemu integralu. Ploščina elipse je*

$$A = \frac{\pi p^2}{2(1+\epsilon)^{3/2}}\,.$$

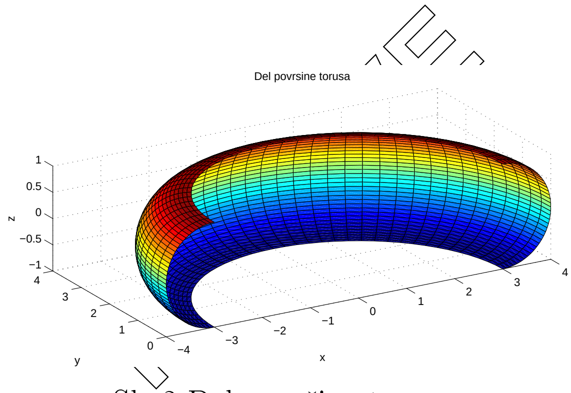
Ocenjevanje:

- *Ideja za računanje ploščine: 2 točki.*
- *Polarne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

3. (20) Površino torusa s polmeroma a in b lahko predstavimo parametrično s

$$\Phi(u,v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$$

za $(u,v) \in [0,2\pi] \times [-\pi,\pi]$. Na sliki 2 je del površine torusa za $(u,v) \in [0,\pi] \times [-\pi/2,\pi/2]$. Označimo ta del ploskve z $\mathcal{S}$. Za normalo si izberite vektor, ki kaže iz torusa.



Sl. 2 Del površine torusa.

a. (10) Naj bo

$$\mathbf{F} = \frac{(y, -x, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

S pomočjo Stokesovega izreka izračunajte

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Rešitev: Po Stokesovem izreku je krivuljni integral enak pretoku rotorja vektorskega polja skozi ploskev $\mathcal{S}$. Brž ugotovimo, da je

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = -\frac{(0,0,1)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Po formuli za pretok vektorskega polja dobimo, da je

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_G \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Ker je le zadnja komponenta $\mathbf{rot}(\mathbf{F})$ različna od 0, potrebujemo le zadnjo komponento vektorskega produkta $\Phi_u \times \Phi_v$, ki je

$$b(a + b\cos v)\sin v.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S} &= -\int_G b\sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= 0. \end{aligned}$$

Krivuljni integral je enak 0.

Ocenjevanje:

- *Citiranje Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Formula za pretok: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Na polkrožna loka vzporedna ravnini xy, ki omejujeta del ploskve na sliki 2, napnemo ploskev, ki bo kot del plašča cilindra, ki ga omejujeta krožnici in daljici, ki povezujeta končne točke krožnic v smeri osi z. Izračunajte pretok polja $\mathbf{F}$ iz a. skozi to novo ploskev.

Rešitev: Možnih rešitev je več. Opazimo lahko, recimo, da je $\mathbf{F}$ *ves čas tangenten na ploskev in je zato integral enak 0.*

Ocenjevanje:

- *Po presoji: 10 točk.*

4. (20) Gibanje planeta okrog sonca si lahko mislimo kot gibanje v xy-ravnini, kjer je sonce v izhodišču. To gibanje lahko opišemo s funkcijo $r(\phi)$, kjer je ϕ kot med osjo x in daljico, ki povezuje planet in izhodišče, r pa razdalja planeta od izhodišča. Funkcija $y(\phi) = 1/r(\phi)$ zadošča diferencialni enačbi

$$y' = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2},$$

kjer sta ϵ in p konstanti, odvisni od mas planetov in gravitacijske konstante.

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Diferencialno enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2}} = 1\,.$$

Poiskati moramo nedoločen integral zgornjega izraza. Označimo $\epsilon^2/p^2 = a^2$. *Uporabili bomo tudi novo spremenljivko* $av = y - 1/p$. *Računamo*

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &= \arcsin(v) \\ &= \arcsin(\frac{1}{a}(y - \frac{1}{p})) \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$\arcsin(\frac{1}{a}(y - \frac{1}{p})) = \phi + c$$

ali

$$\frac{1}{a}(y - \frac{1}{p}) = \sin(\phi + c)$$

ali

$$y(\phi) = \frac{1}{p} + a\sin(\phi + c)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za enačbo z ločljivima spremenljivkama: 2 točki.*
- *Prepisovanje v obliko primerno za integriranje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevanje integracijske konstante: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Rešite zgornjo enačbo pri začetnem pogoju $y(0) = 1/p + \epsilon/p$.

Rešitev: V splošni rešitvi iz a. moramo določiti konstanto c. Veljati mora

$$\frac{1}{p} + a = \frac{1}{p} + a\sin(c)\,.$$

Sledi, da mora biti

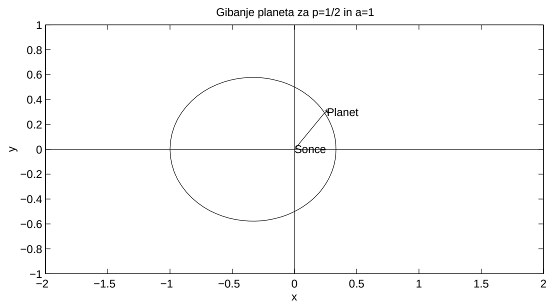
$$\sin(c) = 1$$

ali

$$c = \frac{\pi}{2}\,.$$

Rešitev enačbe je torej

$$y(\phi) = \frac{1}{p} + a\cos(\phi)\,.$$



Sl. 1 Gibanje planeta kot rešitev diferencialne enačbe. Dobimo Keplerjev zakon.

Ocenjevanje:

- *Prepis splošne rešitve: 2 točki.*
- *Vstavljanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Enačba za c: 2 točki.*
- *Konstanta c: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

5. (20) Na intervalu $[1, \infty)$ iščemo rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe s konstanimi koeficienti

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}\,.$$

a. (10) Poiščite partikularno rešitev enačbe na $[1, \infty)$.

Namig: Poskusite z nastavkom $y_p = Ae^{-x}x\log x$ za neko konstanto A.

Rešitev: Sledimo namigu. Računamo

$$y_p' = Ae^{-x}(\log x + 1 - x\log x)$$

in

$$y_p'' = Ae^{-x}\left(\frac{1}{x} - 2 + (x-2)\log x\right).$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$Ae^{-x}\left(\frac{1}{x} - 2 + (x-2)\log x + 2(\log x + 1 - x\log x) + x\log x\right) = \frac{Ae^{-x}}{x}\,.$$

Izbira $A = 1$ nam da partikularno rešitev.

Ocenjevanje:

- *Kaj z nastavkom: 2 točki.*
- *Prvi odvod: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Poenostavljanje: 2 točki.*
- *A: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe, ki ustreza začetnima pogojema $y(1) = 0$ in $y'(1) = 1$.

Rešitev: Splošna rešitev enačbe bo

$$y = x\log xe^{-x} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}\,,$$

kjer sta c_1 in c_2 konstanti, ki ju določimo iz začetnih pogojev. Dobimo $y(1) = c_1 + c_2 = 0$. Z odvajanjem dobimo

$$y'(x) = \log xe^{-x} + e^{-x} - x\log xe^{-x} - c_1e^{-x} + c_2(e^{-x} - xe^{-x})\,.$$

Sledi

$$y'(1) = e^{-1} - c_1e^{-1} = 1\,,$$

torej

$$c_1 = 1 - e \qquad in \qquad c_2 = e - 1\,.$$

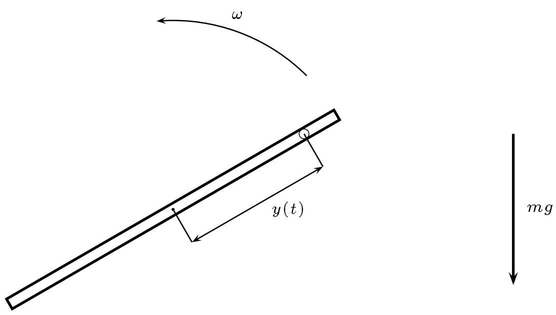
Iskana rešitev je

$$y = x\log xe^{-x} + (e-1)xe^{-x}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Vstavljanje v y: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *c_2: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

6. (20) Gladka cev se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω okrog osi pravokotne na cev pritrjene v sredini kot na sliki 3.



Slika 3 Gibanje kroglice v vrteči se cevi.

Kroglica se lahko prosto giblje po celi cevi. Gibanje kroglice pod vplivom težnosti in vrtenja cevi opisuje diferencialna enačba

$$m\ddot{y} - m\omega^2 y = -mg\sin(\omega t)\,,$$

kjer je m masa kroglice, y razdalja kroglice od osi in g gravitacijska konstanta.

a. (10) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Najprej poiščemo rešitvi homogene enačbe. Karakteristični polinom je oblike $P(\lambda) = m\lambda^2 - m\omega^2$ *z ničlama* $\lambda_1 = \omega$ *in* $\lambda_2 = -\omega$. *Rešitvi homogene enačbe sta torej*

$$y_1(t) = e^{\omega t} \qquad in \qquad y_2(t) = e^{-\omega t}\,.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $y_p(t) = Ae^{i\omega t}$. *Vstavimo v enačbo, pokrajšamo* $me^{i\omega t}$ *in dobimo*

$$-A\omega^2 - A\omega^2 = -g\,.$$

Izračunamo $A = \frac{g}{2\omega^2}$, *torej je*

$$y_p(t) = \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)\,.$$

Splošna rešitev je

$$y(t) = \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t) + c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 2 točki.*

- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Recimo, da je cev dolga $2l$ in je $l > \frac{g}{2\omega^2}$. Kroglica se začne gibati z začetnima pogojema $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = \frac{g}{2\omega}$. Ali bo kroglica "odletela" iz cevi?

Rešitev: V a. smo poiskali splošno rešitev diferencialne enačbe. Zdaj moramo poiskati konstanti c_1 in c_2, tako da bo zadoščeno danima začetnima pogojema. Dobimo enačbi

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad in \qquad c_1 - c_2 = 0$$

z rešitvama $c_1 = c_2 = 0$. Gibanje torej opisuje funkcija

$$y(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)\,.$$

Največjo možno razdaljo od osi kroglica doseže pri $t = \pi/2\omega$ in ta razdalja je $\frac{g}{2\omega^2}$. Ker je cev daljša od te maksimalne razdalje, kroglica ne bo odletela.

Ocenjevanje:

- *Ideja, kako uporabiti začetna pogoja: 2 točki.*
- *Enačbi za konstanti: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Maksimalni odklon: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*