FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

29. junij 2001

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

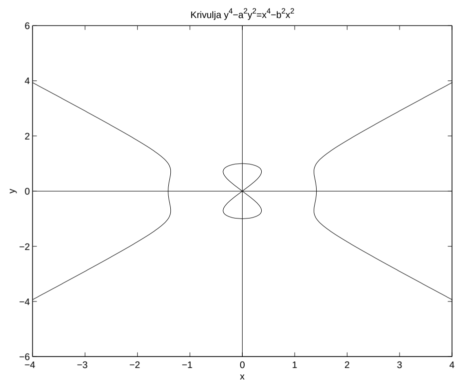
Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Na sliki 1 je "hudičeva krivulja" [1] dana implicitno z enačbo

$$y^4 - a^2y^2 = x^4 - b^2x^2$$

za $a = 1$ in $b = \sqrt{2}$.



Sl. 1 Hudičeva krivulja za $a = 1$ in $b = \sqrt{2}$.

a. (10) Poiščite točki na najbolj desnem "kraku" hudičeve krivulje, ki sta najbliže y-osi.

Rešitev: Problema se lotimo z uporabo Lagrangeovih multiplikatorjev. Minimizirati želimo funkcijo $f(x, y) = x$ *pri pogoju*

$$g(x, y) = y^4 - y^2 - x^4 + 2x^2 = 0\,.$$

Sestavimo novo funkcijo

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y)\,,$$

jo parcialno odvajajmo po x *in* y *in parcialna odvoda izenačimo z* 0*. Dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 1 - \lambda\,(-4x^3 + 4x) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\lambda(4y^3 - 2y) = 0\,. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe sledi, da je ali $\lambda = 0$*, ali* $y = 0$ *ali* $y = \pm 1/\sqrt{2}$*. Prva rešitev ne pride v poštev, ker z* $\lambda = 0$ *ne moremo zadostiti drugi enačbi. Če je* $y = 0$*, potem mora pripadajoči* x *ustrezati pogoju* $0 = x^4 - 2x^2$*, torej je ali* $x = 0$ *ali* $x = \pm\sqrt{2}$*. Na desnem kraku leži le točka* $(\sqrt{2}, 0)$*. Če je* $y = 1/\sqrt{2}$*, potem iz pogoja sledi, da morajo pripadajoče točke ustrezati enačbi*

$$-\frac{1}{4} = x^4 - 2x^2\,.$$

[1] Ime je dal matematik G. Cramer leta 1750

Zaradi simetrije je dovolj poiskati le pozitivne rešitve. Hitro se prepričamo, da sta pozitivni rešitvi

$$x_1 = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad in \qquad x_2 = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}\,.$$

Ugotovimo, da so točke, ki ležijo na desnem kraku hudičeve krivulje in hkrati zadoščajo enačbam za vezane estreme $(\sqrt{2}, 0)$, $(x_1, 1/\sqrt{2})$ *in* $(x_1, -1/\sqrt{2})$. *Ker je*

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} < \sqrt{2}$$

(to ugotovimo, recimo, če kvadriramo), sta zadnji točki tisti na desnem kraku, ki sta najbliže y *osi.*

Ocenjevanje:

- *Formulacija z Lagrangeovimi multiplikatorji: 2 točki.*
- *Izbira* $f(x,y)$ *in* $g(x,y)$*: 2 točki.*
- F *in parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Rešitve enačb: 2 točki.*
- *Končni točki: 2 točki.*

b. (10) Točka $(0,1)$ leži na hudičevi krivulji. Pokažite, da na neki okolici U točke $x_0 = 0$ obstaja taka funkcija $h(x)$, da je $h(0) = 1$ in

$$h^4(x) - h^2(x) = x^4 - 2x^2\,.$$

Izračunajte še $h''(0)$.

Rešitev: Uporabimo izrek o implicitni funkciji za funkcijo

$$F(x,y) = y^4 - y^2 - x^4 + 2x^2\,.$$

Preverimo $F(0,1) = 0$ *in*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0\,.$$

Izrek o implicitni funkciji nam zagotavlja obstoj želene funkcije h. *Za izračun drugega odvoda odvajajmo identiteto* $F(x, h(x)) = 0$. *Dobimo*

$$F_x(x, h(x)) + F_y(x, h(x)) \cdot h'(x) = 0$$

in s ponovnim odvajanjem po x

$$F_{xx} + F_{xy} \cdot h' + (F_{xy} + F_{yy} \cdot h') \cdot h' + F_y \cdot h'' = 0\,.$$

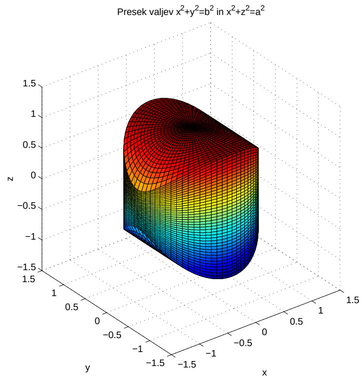
Upoštevajmo, da je $h'(0) = 0$ *in* $F_{xx}(0,1) = 4$ *in dobimo*

$$h''(0) = -\frac{1}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je potreben izrek o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje identitete: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje identitete: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*

2. (20) Telo G naj bo presek dveh neskončnih cilindrov danih z enačbama $x^2+y^2=b^2$ in $x^2+z^2=a^2$ z $0<b\le a$. Primer takega telesa je na sliki 2.



Sl. 2 Telo G nastane kot presek valjev.

a. (10) Izračunajte prostornino telesa G, če je $a=b$.

Rešitev: Iz enačbe drugega valja izrazimo $z=\sqrt{a^2-x^2}$. *Polovico prostornine bomo dobili, če to funkcijo integriramo po krogu* $x^2+y^2\le b^2$. *Računamo po Fubiniju.*

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{\{x^2+y^2\le b^2\}} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_{-b}^{b}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 4\int_{-b}^{b}\sqrt{(b^2-x^2)(a^2-x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= 8\int_{0}^{b}(b^2-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 8\left(b^3-\frac{b^3}{3}\right) \\ &= \frac{16b^3}{3}. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da integriramo funkcijo po krogu: 2 točki.*
- *Zapis integrala: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še površino telesa G, če je $a=b$.

Namig: Površino plašča izračunajte tako, da ga "odvijete" v ravnino.

Rešitev: Najprej se lotimo računanja površine zgornje ploskve. Če označimo $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2}$, dobimo površino po formuli

$$P=\int_{\{x^2+y^2\le a^2\}}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

V našem primeru je

$$1+f_x^2+f_y^2=1+\frac{x^2}{a^2-x^2}$$

torej je

$$\begin{aligned}
P &= \int_{\{x^2+y^2\le b^2\}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^b\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\phi}}\\
&= a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\left[-\frac{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\phi}}{\cos^2\phi}\right]_0^a\\
&= a\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\cos^2\phi}-\frac{a|\sin\phi|}{\cos^2\phi}\right)\mathrm{d}\phi\\
&= 4a^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\cos^2\phi}-\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}\right)\mathrm{d}\phi\\
&= 4a^2\lim_{\alpha\to\pi/2}\left(\mathrm{tg}\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\right)\\
&= 4a^2\,.
\end{aligned}$$

Potrebujemo še površino plašča. Če ga odvijemo, ugotovimo, da je površina enaka

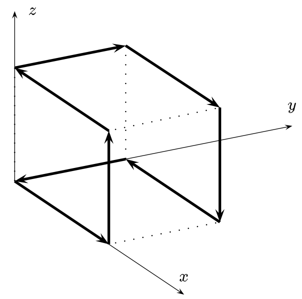
$$P_1=8a\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\cos^2\phi}\,\mathrm{d}\phi\,.$$

Ta integral zlahko izračunamo in dobimo rezultat $8a^2$. Celotna površina telesa je $16a^2$.

Ocenjevanje:

- *Formula za površino: 2 točki.*
- *Vstavljanje in polarne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini in integriranje: 2 točki.*
- *Integral za plašč: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

3. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - (x+z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.



Slika 3 Kocka z včrtano potjo $\mathcal{C}$.

a. (10) Naj bo $\mathcal{C}$ zaključena pot z začetno točko 0, ki sledi robovom kocke z robom 1 kot na sliki 3. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} d\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Najprej izračunamo rotor vektorskega polja $\mathbf{F}$*. Dobimo*

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Za uporabo Stokesovega izreka si moramo izbrati ploskev, katere rob bo dana krivulja. Ena od možnosti je, da si izberemo ploskvi kocke, ki sta vzporedni xy*-ravnini in ploskev, ki je vzporedna* yz*-ravnini, vendar ne leži v njej. Po vijačnem pravilu si za normalo na ploskev vedno izberemo vektorje, ki kažejo v kocko. Pretoka skozi ploskvi vzporedni* xy*-ravnini se uničita, ker sta nasprotnega predznaka. Izračunati moramo samo se pretok skozi tretji kos ploskve. Normala je tam* $\mathbf{i}$*, tako da je zaradi konstantnosti rotorja pretok* 2 *(ploščina ploskve krat skalarni produkt normale in vektorskega polja).*

Ocenjevanje:

- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Ideja s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Izbira ploskve: 2 točki.*
- *Vijačno pravilo: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte pretok polja skozi površino kocke brez ploskev vzporednih xz-ravnini. Za normalo si vedno izberite vektor, ki kaže iz kocke.

Rešitev: Uporabili bomo Gaussov izrek. Zlahka izračunamo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$*, torej je pretok skozi celotno površino kocke enak* 0*. Izračunajmo pretok skozi ploskvi vzporedni* xz*-ravnini. Najprej se lotimo ploskve, ki leži v* xz*-ravnini.*

Tam je $y = 0$ *in je vektorsko polje enako* $(0, -x - z, 0)$. *Normala je tam* $-\mathbf{j}$, *zato je pretok enak*

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x + z)\,\mathrm{d}z = 1\,.$$

Na ploskvi vzporedni xz*-ravnini je* $y = 1$, *normala pa je enaka* $\mathbf{j}$. *Pretok je tako*

$$-\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (x + z)\,\mathrm{d}z = -1\,.$$

Pretoka skozi manjkajoči ploskvi se uničita in je tako želeni pretok enak 0.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Gaussovim izrekom: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Formula za pretok za posamezni ploskvi: 2 točki.*
- *Rezultata za posamezni ploskvi: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

4. (20) Zunaj atmosfere zemlje opisuje padanje telesa proti zemlji pod vplivom težnosti diferencialna enačba

$$\dot{h} = -\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}\right)},$$

kjer $h = h(t)$ označuje oddaljenost od središča zemlje v trenutku t, h_0 začetno oddaljenost, g zemeljski pospešek in R polmer zemlje.

a. (10) Pokažite, da splošna rešitev diferencialne enačbe ustreza enakosti

$$h_0 \arcsin\left(\sqrt{\frac{h}{h_0}}\right) - \sqrt{h(h_0 - h)} = -\sqrt{\frac{2g}{h_0}}\,R(t + c)$$

za neko konstanto c.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{\dot{h}\sqrt{h}}{\sqrt{h_0 - h}} = -\sqrt{\frac{2g}{h_0}}\,R\,.$$

Integriramo levo in desno stran. Za desno stran preprosto preverimo, da je odvod danega izraza enak

$$\frac{\dot{h}\sqrt{h}}{\sqrt{h_0 - h}},$$

integracija leve strani pa je preprosta.

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe: 2 točki.*
- *Ugotovitev, da moramo integrirati: 2 točki.*
- *Integral leve strani (na en ali drug način): 2 točki.*
- *Integral desne strani: 2 točki.*
- *Upoštvanje konstante: 2 točki.*

b. (10) V kolikšnem času bo telo priletelo z začetne višine h_0 do roba zemeljske atmosfere na višini h_1? Kolikšna bo takrat absolutna hitrost telesa?

Rešitev: Vemo, da bo

$$h_0 \text{arcsin}\left(\sqrt{\frac{h}{h_0}}\right) - \sqrt{h(h_0 - h)} = \sqrt{\frac{2g}{h_0}}\,R(t + c)\,.$$

Najprej moramo določiti konstanto c. Ko je $t = 0$, je $h(0) = h_0$, torej je

$$\frac{\pi h_0}{2} = \sqrt{\frac{2g}{h_0}}\,Rc\,.$$

Sledi

$$c = \frac{\pi h_0^{3/2}}{\sqrt{2g}R}\,.$$

Označimo čas, ki ga iščemo, s T. Sledi

$$h_0 \arcsin\left(\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}\right) - \sqrt{h_1(h_0 - h_1)} = \sqrt{\frac{2g}{h_0}}\, R(T + c)\,.$$

Iz te enačbe lahko izrazimo T. Histrost na višini h_1 lahko razberemo že iz začetne enačbe.

$$v = \dot{h}(T) = \sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0}\right)}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Začetni pogoj: 2 točki.*
- *Enačba za konstanto: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Čas: 2 točki.*
- *Hitrost: 2 točki.*

5. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = g(x)\,.$$

a. (10) Naj bo $g(x) = x$. Poiščite splošno rešitev zgornje eneačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je $P(\lambda) = (\lambda + 1)^3$. *Ničla* $\lambda = -1$ *je trojna, torej so linearno neodvisne rešitve homogene enačbe enake* $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ *in* $y_3 = x^2e^{-x}$. *Partikularno rešitev iščemo z nastavkom* $y_p(x) = a + bx$. *Vstavimo v enačbo in dobimo*

$$3b + (a + bx) = x\,,$$

torej $b = 1$ *in* $a = -3$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Linearno neodvisne rešitve: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Splošna reštev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $g(x) = e^{-x}$. Poiščite rešitev diferencialne enačbe pri pogoju $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Rešitev: Linearno neodvisne rešitve homogene enačbe že poznamo. Ker je $\lambda = -1$ *trojna rešitev karakterističnega polinoma, bomo iskali partikularno rešitev z nstavkom* $y_p(x) = ax^3e^{-x}$. *Odvajamo in vstavimo v enačbo. Dobimo*

$$6ae^{-x} = e^{-x}\,,$$

torej je $y_p(x) = x^3e^{-x}/6$. *Splošna rešitev bo oblike*

$$y(x) = \frac{x^3e^{-x}}{6} + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}\,.$$

Določiti moramo še konstante. Iz prve zahteve dobimo $c_1 = 0$, *iz druge sledi* $c_2 = 0$ *in iz tretje* $c_3 = 0$.

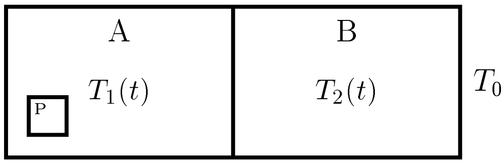
Ocenjevanje:

- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

6. (20) Stavba ima enaka prostora A in B kot na sliki 4. Grejemo samo prostor A s pečjo konstantne moči M_0. Označimo temperaturo sobe A v trenutku t s $T_1(t)$ in temperaturo sobe B s $T_2(t)$. Zunanjost naj ima konstantno temperaturo T_0. Potek temperatur bo opisoval sistem diferencialnih enačb oblike

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= -\alpha(T_1 - T_0) + \beta(T_2 - T_1) + \gamma M_0 \\ \dot{T}_2 &= -\alpha(T_2 - T_0) + \beta(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Konstante $\alpha > 0$, $\beta > 0$ in $\gamma > 0$ so odvisne od specifične toplote zraka, njegove toplotne prevodnosti, toplotne prevodnosti in dimenzij sten.



Sl. 4 Prostora A in B v stavbi.

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev homogenega sistema.

Rešitev: Matrika homogenega sistema je oblike

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \beta \\ \beta & -\alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

Potrebujemo lastne vrednosti in lastne vektorje te matrike. Karakteristični polinom je oblike

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2(\alpha + \beta)\lambda + \alpha^2 + 2\alpha\beta$$

z ničlama

$$\lambda_1 = -\alpha \qquad \textit{in} \qquad \lambda_2 = -\alpha - 2\beta\,.$$

Pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{x}_1 = (1, 1)$ *in* $\mathbf{x}_2 = (1, -1)$. *Stolpca fundamentalne matrike rešitev bosta linearni kombinaciji oblike*

$$c_1 e^{-\alpha t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{(-\alpha-2\beta)t}\mathbf{x}_2\,.$$

Za prvi stolpec dobimo $c_1 = c_2 = 1/2$, *za drugi pa* $c_1 = 1/2$ *in* $c_2 = -1/2$. *Fundamentalna matrika rešitev je*

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\alpha t} + \frac{1}{2}e^{(-\alpha-2\beta)t} & \frac{1}{2}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2}e^{(-\alpha-2\beta)t} \\ \frac{1}{2}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2}e^{(-\alpha-2\beta)t} & \frac{1}{2}e^{-\alpha t} + \frac{1}{2}e^{(-\alpha-2\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Lastna vektorja: 2 točki.*

- *Nastavek za stolpca: 2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Matrika: 2 točki.*

b. (10) Rešite sistem enačb pri pogoju, da začnemo kuriti na novo, torej $T_1(0) = T_2(0) = T_0$. Kolikšna bo temperatura v sobi A po zelo dolgem času?

Rešitev: Enačba je nehomogena, pri čemer je

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} \gamma M_0 + \alpha T_0 \\ \alpha T_0 \end{pmatrix} .$$

Poiskati moramo partikularno rešitev. Ker je $\mathbf{b}$ *konstanten vektor, je tudi partikularna rešitev konstanten vektor, ki zadošča enačbi*

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_p = -\mathbf{b} .$$

Za rešitev dobimo

$$\mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix} + \frac{M_0\gamma}{\alpha(\alpha+2\beta)} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \beta \end{pmatrix} .$$

Zadostiti moramo še začetnim pogojem. Splošna rešitev je

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} .$$

Dobimo enačbo

$$\begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \end{pmatrix} + \frac{M_0\gamma}{\alpha(\alpha+2\beta)} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \beta \end{pmatrix} + \mathbf{c} .$$

Sledi

$$\mathbf{c} = -\frac{M_0\gamma}{\alpha(\alpha+2\beta)} \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \beta \end{pmatrix} .$$

Po zelo dolgem času bo temperatura v sobi A enaka limiti $T_1(t)$, ko $t \to \infty$. Ta limita je

$$\frac{(\alpha+\beta)\gamma M_0}{\alpha(\alpha+2\beta)} + T_0 .$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačba za* $\mathbf{c}$*: 2 točki.*
- *Rešitev in limita: 2 točki.*