FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2
Pisni izpit
15. junij 2001

Ime in priimek: ______________________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo $f\colon R^3 \to R$ dana z

$$f(x,y,z) = xyz$$

in $g\colon R^3\backslash\{0\} \to R$ z

$$g(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\,.$$

a. (10) Poiščite, kje bi utegnili biti ekstremi funkcije f pri pogoju $g(x,y,z) = 0$.

Rešitev: Uporabimo metodo Lagrangeovih multiplikatorjev. Definiramo

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda\, g(x,y,z)\,.$$

Izračunajmo parcialne odvode funkcije F po x, y in z in jih izenačimo z 0. Dobimo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= yz + \frac{\lambda}{x^2} = 0\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= xz + \frac{\lambda}{y^2} = 0\\ \frac{\partial F}{\partial x} &= xy + \frac{\lambda}{z^2} = 0\,.\end{aligned}$$

Pomnožimo prvo enačbo z x, drugo z y in tretjo z z in jih seštejmo. Dobimo

$$3xyz + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 0\,.$$

Sledi $\lambda = -3xyz$. Vstavimo v prvo enačbo in dobimo

$$yz - \frac{3yz}{x} = 0\,.$$

Ker morajo biti x, y, z različni od 0, lahko krajšamo in dobimo $x = 3$. Zaradi simetrije je $x = y = z$.

Ocenjevanje:

- *Funkcija F: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Enačbe za x, y, z: 2 točki.*
- *Uporaba vezi: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da na neki okolici U točke $(3,3)$ obstaja odvedljiva funkcija $h\colon U \to R$, taka da je $h(3,3) = 3$ in $g(x,y,h(x,y)) = 0$ za $(x,y) \in U$. Kot znano privzemite, da je $h_{xx}(3,3) = h_{yy}(3,3) = 4/3$ in $h_{xy}(3,3) = 2/9$. Izračunajte Hessovo matriko funkcije $(x,y) \overset{G}{\mapsto} f(x,y,h(x,y))$ in sklepajte, da ste v a. našli minimum.

Rešitev: Obstoj funkcije h zagotovi izrek o implicitni funkciji. Funkcija g je na okolici točke $(3,3,3)$ *zvezno parcialno odvedljiva in*

$$\frac{\partial g}{\partial z}(3,3,3) = -\frac{1}{3^2} \neq 0\,.$$

Pogoji izreka o implicitni funkciji so izpolnjeni, zato obstaja funkcija h. Potrebujemo h_{xx}, h_{xy} *in* h_{yy} *v točki* $(3,3)$. *Z odvajanjem identitete* $g(x,y,h(x,y)) = 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned}
g_{xx} + g_{xz}\cdot h_x + (g_{xz} + g_{zz}\cdot h_x)\,h_x + g_z h_{xx} &= 0\\
g_{xy} + g_{xz}\cdot h_y + (g_{yz} + g_{zz}\cdot h_y)\,h_x + g_z h_{xy} &= 0\\
g_{yy} + g_{yz}\cdot h_y + (g_{yz} + g_{zz}\cdot h_y)\,h_y + g_z h_{yy} &= 0
\end{aligned}$$

Ker so vsi mešani odvodi funkcije g enaki 0 *in je* $h_x(3,3) = h_y(3,3) = 1$, *ter* $g_z(3,3,3) = -1/9$, *dobimo*

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2}{27} + \frac{2}{27} - \frac{h_{xx}(3,3)}{9}\\
0 &= \frac{2}{27} - \frac{h_{xy}(3,3)}{9}\\
0 &= \frac{2}{27} + \frac{2}{27} - \frac{h_{yy}(3,3)}{9}
\end{aligned}$$

Sledi $h_{xx}(3,3) = 4/3$, $h_{xy}(3,3) = 2/3$ *in* $h_{yy}(3,3) = 4/3$. *Podobno dobimo*

$$\begin{aligned}
G_{xx} &= f_{xx} + f_{xz}\cdot h_x + (f_{xz} + f_{zz}\cdot h_x)\,h_x + f_z h_{xx}\\
G_{xy} &= f_{xy} + f_{xz}\cdot h_y + (f_{yz} + f_{zz}\cdot h_y)\,h_x + f_z h_{xy}\\
G_{yy} &= f_{yy} + f_{yz}\cdot h_y + (f_{yz} + f_{zz}\cdot h_y)\,h_y + f_z h_{yy}
\end{aligned}$$

Zdaj upoštevamo, da je $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 0$ *in so vsi mešani odvodi enaki* 3. *Dobimo* $G_{xx}(3,3) = G_{yy}(3,3) = 6$ *in* $G_{xy}(3,3) = 3$. *Sledi*

$$H_G(3,3) = \begin{pmatrix} 6 & 3\\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matrika je pozitivno definitna, torej smo našli v a. minimum.

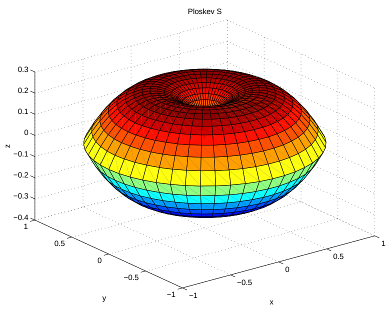
Ocenjevanje:

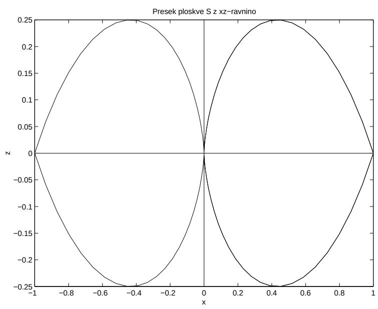
- *Prvo posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Parcialni dovodi h: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi g: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

2. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ na sliki 1 je dana v krogelnih koordinatah z enačbo

$$r = 1 - |\cos\theta|$$

za $0 \le \phi \le 2\pi$ in $0 \le \theta \le \pi$.





Sl. 2 Ploskev $\mathcal{S}$ in presek ploskve z xz-ravnino.

a. (10) Izračunajte prostornino telesa, ki ga omejuje ploskev $\mathcal{S}$.

Rešitev: Uporabimo krogelne koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
V &= \int_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{1-|\cos\theta|} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\frac{1}{3}(1-|\cos\theta|)^3\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,(1-\cos\theta)^3\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^{1} (1-u)^3\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja o uporabi krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Pravilne meje in Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte ploščino preseka telesa, ki ga omejuje ploskev $\mathcal{S}$, z xz-ravnino.

Rešitev: Lotimo se najprej desnega dela preseka. Uvedemo polarne koordinate in računamo

$$
\begin{aligned}
P &= \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{1-|\cos\theta|} r\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{3\pi}{4} - 2
\end{aligned}
$$

Ploščina celotnega preseka je $3\pi/2 - 4$.

Ocenjevanje:

- *Ideja o uporabi krogelnih koordinat: 2 točki.*
- *Pravilne meje in Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bosta $f, g\colon R^3 \to R$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji.

a. (10) Naj bo zaključena krivulja $\mathcal{C}$ rob ploskve $\mathcal{S}$. Predpostavite, da lahko rob orientiramo skladno z izbiro normale na ploskvi. Pokažite, da je

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}} g \cdot \nabla f \, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Izračunajmo najprej

$$\mathbf{rot}(f \cdot \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$$

in podobno

$$\mathbf{rot}(g \cdot \nabla f) = \nabla g \times \nabla f\,.$$

Po Stokesovem izreku je torej

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot \nabla g \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}} \nabla f \times \nabla g \, \mathrm{d}\mathbf{S}$$

in podobno

$$\int_{\mathcal{C}} g \cdot \nabla f \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}} \nabla g \times \nabla f \, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Če si izberemo v obeh primerih orientacijo $\mathcal{C}$, ki je skladna z izbiro normale na $\mathcal{S}$, trditev sledi.

Ocenjevanje:

- *Ideja z rotorjem: 2 točki.*
- *Rotor prvega polja: 2 točki.*
- *Rotor drugega polja: 2 točki.*
- *Uporaba Stokesovega izreka: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ površina zgornje polovice krogle s polmerom $R = 1$, središčem v izhodišču brez dela površine v xy-ravnini. Izračunajte

$$\int_{\partial\mathcal{S}} f \cdot \nabla f \, \mathrm{d}\mathbf{r}\,,.$$

kjer si za normalo vedno izberete $\mathbf{r}$.

Rešitev: Hitro se prepričamo, da je

$$\mathbf{rot}(f \cdot \nabla f) = 0\,.$$

Po Stokesovem izreku je potem

$$\int_{\partial\mathcal{S}} f \cdot \nabla f \, \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Pravilen zapis Stikesovega izreka: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

4. (20) V trenutku $t = 0$ vzleti letalo iz točke $(0,0)$ v koordinatnem sistemu. V točki $(l,0)$ je letališče, ki oddaja neusmerjene radijske valove. Letalo leti tako, da je os letala v vsakem trenutku usmerjena točno proti oddajniku v točki $(l,0)$. Hitrost letala je konstantno enaka v, v smeri osi y pa piha veter s konstantno hitrostjo a. Predpostavite, da je $v > a$. Pot letala opisuje graf funkcije y, ki na intervalu $[0,l)$ ustreza diferencialni enačbi

$$y' = \frac{a}{v} \cdot \frac{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}}{l-x} - \frac{y}{l-x}\,.$$

a. (10) Pokažite, da funkcija

$$u(x) = \frac{y}{l-x}$$

ustreza diferencialni enačbi

$$u' = \frac{a\sqrt{1+u^2}}{v(l-x)}\,.$$

Rešitev: Odvajamo u in dobimo

$$\begin{aligned} u' &= \frac{y'(l-x)+y}{(l-x)^2} \\ &= \frac{y'+u}{l-x}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$u' \cdot (l-x) - u = \frac{a}{v}\sqrt{1+u^2} - u\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje kvocienta: 2 točki.*
- *Eliminacija y: 2 točki.*
- *Izračun y': 2 točki.*
- *Vstavljanje v diferencialno enačbo: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Poiščite funkcijo y.

Rešitev: Najprej poiščimo funkcijo u. Začetni pogoj za funkcijo y je $y(0) = 0$, zato bo tudi $u(0) = 0$. Enačba za u je enačba z ločljivima spremenljivkama. Prepišemo

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{a}{v(l-x)}\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\operatorname{arcsinh}(u) = -\frac{a}{v}(\log(l-x)+c)\,,$$

kjer je c konstanta. Iz začetnega pogoja dobimo

$$0 = -\frac{a}{v}(\log(l)+c)\,,$$

torej je $c = -\log(l)$. *Dobimo*

$$\operatorname{arcsinh}(u) = -\frac{a}{v}\log(\frac{l-x}{l})$$

ali

$$u = \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{l-x}{l}\right)^{a/v} + \left(\frac{l-x}{l}\right)^{-a/v}\right).$$

Sledi

$$y = \frac{(l-x)}{2}\left(-\left(\frac{l-x}{l}\right)^{a/v} + \left(\frac{l-x}{l}\right)^{-a/v}\right).$$

Ocenjevanje:

- *Opazka, da je enačba za* u *z ločljivima spremenljivkama: 2 točki.*
- *Prepis: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

5. (20) Naj bo ω število z $|\omega| < 1$ in naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \omega & \sqrt{1-\omega^2} \\ -\sqrt{1-\omega^2} & \omega \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev sistema enačb

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Rešitev: Najprej poiščemo lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$*. Računamo*

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \omega-\lambda & \sqrt{1-\omega^2} \\ -\sqrt{1-\omega^2} & \omega-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\omega\lambda + 1.$$

Lastni vrednosti sta $\lambda_1 = \omega + i\sqrt{1-\omega^2}$ *in* $\lambda_2 = \omega - i\sqrt{1-\omega^2}$*. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti* λ_1 *je* $\mathbf{z} = (1, i)$*. Linearno neodvisni rešitvi bosta realni in imaginarni del*

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{z} = e^{\omega t + i\sqrt{1-\omega^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Označimo $\delta = \sqrt{1-\omega^2}$*. Dobimo*

$$\mathbf{v}_1(t) = e^{\omega t}\begin{pmatrix} \cos\delta t \\ -\sin\delta t \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad \mathbf{v}_2(t) = e^{\omega t}\begin{pmatrix} \sin\delta t \\ \cos\delta t \end{pmatrix}.$$

Ti linearno neodvisni rešitvi že ustrezata zahtevam za fundamentalno matriko rešitev, zato je

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\omega t}\begin{pmatrix} \cos\delta t & \sin\delta t \\ -\sin\delta t & \cos\delta t \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Lastni vrednosti: 2 točki*
- *Lastni vektor: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Fundamentalna matroka rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev nehomogene enačbe

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \begin{pmatrix} e^{\omega t} \\ e^{\omega t} \end{pmatrix}$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{v}(0) = (0, 0)$.

Rešitev: Po formuli dobimo partikularno rešitev kot

$$\mathbf{v}_p = \int_0^t \mathbf{Y}(t-s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Z integriranjem dobimo

$$\mathbf{v}_p(t) = \frac{e^{\omega t}}{\delta} \begin{pmatrix} 1 + \sin \delta t - \cos \delta t \\ -1 + \sin \delta t + \cos \delta t \end{pmatrix} .$$

Splošna rešitev bo oblike

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 .$$

Vstavimo $t = 0$ *in dobimo* $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Formula za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbi za konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

6. (25) Vektorsko polje $\mathbf{u}$ naj opisuje tok nestisljivega fluida, za katerega veljajo Navier-Stokesove enačbe

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \rho\mathbf{f} + \mu\,\Delta\mathbf{u}\,.$$

Predpostavljajte, da je $\mathbf{f} = -\nabla\phi$ za neko funkcijo ϕ.

a. (10) Izpeljite najprej, da vedno velja

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u})\,.$$

Pojasnilo: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Rešitev: Zapišimo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. *S temi oznakami je*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\,.$$

Izračunajmo komponente gradienta in dobimo

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x}u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x}u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x}u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y}u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial y}u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial z}u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z}u_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z}u_3 \end{pmatrix}^T.$$

Izračunajmo še

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\times\mathbf{rot}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ -\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Zdaj preverimo enakost obeh izrazov.

Ocenjevanje:

- *Interpretacija leve strani: 2 točki.*
- *Izračun gradienta: 2 točki.*
- *Gradient na desni strani: 2 točki.*
- *Vektorsko množenje: 2 točki.*
- *Preverjanje enakosti: 2 točki.*

b. (10) Predpostavite, da so vsi parcialni odvodi komponent $\mathbf{u}$ do tretjega reda po t ali po x, y, z zvezni. Označite $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}(\mathbf{u})$. Pokažite, da velja

$$\rho\,\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \rho\,\mathbf{rot}(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}) + \mu\Delta\boldsymbol{\omega}\,.$$

Namig: Vrstni red pri parcialnem odvajanju ni pomemben, če so parcialni odvodi zvezni. Izračunajte rotor leve in desne strani Navier-Stokesove enačbe.

Rešitev: *Če izračunamo rotor leve in desne strani Navier-Stokesove enačbe, moramo dobiti enaki vektorski polji. Ker je fluid nestisljiv, obravnavamo* ρ *kot konstanto. Upoštevajmo še, da je rotor vsakega potencialnega polja enak* 0*, torej je* $\mathbf{rot}(\mathbf{f}) = 0$ *po predpostavki, zaradi identitete v a. pa je*

$$\mathbf{rot}\left((\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}\right) = -\mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})\,.$$

Nazadnje upoštevamo še, da lahko zamenjamo vrstne rede parcialnega odvajanja. Dobimo

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})\right) = \mu\, \Delta \boldsymbol{\omega}\,.$$

Enakost sledi.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je rotor potencialnega polja enak* $\mathbf{0}$*: 2 točki.*
- *Rotor* $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}$*: 2 točki.*
- *Rotor leve strani: 2 točki.*
- *Rotor desne strani: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*