FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

30. junij 2003

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: ________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bodo a, b, c in d pozitivna števila, za katere velja $a+b+c+d=1$. Na območju $\Delta = \{(x,y,z)\colon x>0, y>0, z>0, x+y+z<1\}$ naj bo dana funkcija

$$f(x,y,z) = a\log x + b\log y + c\log z + d\log(1-x-y-z)\,.$$

a. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije f na Δ in jih klasificirajte.

Rešitev: Za stacionarne točke mora veljati

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} &=& \frac{a}{x} - \frac{d}{1-x-y-z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &=& \frac{b}{y} - \frac{d}{1-x-y-z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &=& \frac{c}{z} - \frac{d}{1-x-y-z} = 0 \end{array}\,.$$

Enačbe damo na skupni imenovalec. Števci morajo biti enaki 0. Dobimo

$$\begin{array}{rcl} a(1-x-y-z)-dx &=& 0 \\ b(1-x-y-z)-dy &=& 0 \\ c(1-x-y-z)-dz &=& 0 \end{array}\,.$$

Enačbe seštejemo. Sledi

$$a+b+c = (a+b+c+d)(x+y+z)\,,$$

torej $x+y+z = a+b+c$. Sledi $x=a$, $y=b$ in $z=c$. Za klasifikacijo izračunamo Hessejevo matriko v točki (a,b,c). Z nekaj računanja sledi

$$Hf(a,b,c) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}-\frac{1}{d} & -\frac{1}{d} & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & -\frac{1}{b}-\frac{1}{d} & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & -\frac{1}{d} & -\frac{1}{c}-\frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

Izračunamo determinante minorjev. Dobimo števila

$$-\frac{1}{a}-\frac{1}{d},\ \frac{1}{ab}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd} \quad \textit{in} \quad -\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\frac{1}{abd}-\frac{1}{acd}-\frac{1}{bcd}\,.$$

Ker so a,, b, c in d pozitivna števila, predznaki minorjev alternirajo. Točka (a,b,c) je lokalni maksimum.

Ocenjevanje:

- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Rešitev enačb: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Računanje minorjev Hessejeve matrike: 2 točki.*
- *Sklep o lokalnem ekstremu: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $g\colon \Delta \to \mathbb{R}$ dana z

$$g(x,y,z) = \log x - \log y + \log z - \log(1-x-y-z)\,.$$

Pokažite, da je v točki (x, y, z), kjer je

$$x = (a+b)(a+d)\,, \quad y = (a+b)(b+c) \quad \text{in} \quad z = (b+c)(c+d)\,.$$

lahko ekstrem funkcije $f(x, y, z)$ pri pogoju $g(x, y, z) = 0$.

Namig: Preverite, da je $1 - x - y - z = (a+d)(c+d)$.

Rešitev: Sestavimo funkcijo $F(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$. *Parcialno odvajamo in dobimo enačbe*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{a}{x} - \frac{d}{1-x-y-z} - \frac{\lambda}{x} - \frac{\lambda}{1-x-y-z} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{b}{y} - \frac{d}{1-x-y-z} + \frac{\lambda}{y} - \frac{\lambda}{1-x-y-z} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{c}{z} - \frac{d}{1-x-y-z} - \frac{\lambda}{z} - \frac{\lambda}{1-x-y-z} = 0 \end{aligned}\,.$$

Enačbe damo na skupni imenovalec. Števci morajo biti enaki 0. *Preuredimo in dobimo*

$$\begin{aligned} (a-\lambda)(1-x-y-z) &= (\lambda+d)x \\ (b+\lambda)(1-x-y-z) &= (\lambda+d)y \\ (c-\lambda)(1-x-y-z) &= (\lambda+d)z \end{aligned}\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$(a+b+c-\lambda)(1-x-y-z) = (\lambda+d)(x+y+z)\,.$$

Sledi, če upoštevamo, da je $a+b+c+d = 1$, *da je*

$$a+b+c-\lambda = x+y+z\,,$$

torej $1-x-y-z = \lambda + d$. *Sledi*

$$x = a-\lambda, \;\; y = b+\lambda \quad in \quad z = c-\lambda\,.$$

Točka (x, y, z) *mora ustrezati tudi pogoju, ki ga lahko zapišemo kot* $xz = y(1-x-y-z)$. *Veljati mora*

$$(a-\lambda)(c-\lambda) = (b+\lambda)(d+\lambda)\,,$$

torej

$$ac - bd = (a+b+c+d)\lambda = \lambda\,.$$

Sledi

$$x = (a+b)(a+d)\,, \quad y = (a+b)(b+c) \quad in \quad z = (b+c)(c+d)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Lagrangeova funkcija: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Seštevanje enačb: 2 točki.*
- *Upoštevanje pogoja: 2 točki.*
- *Točka: 2 točki.*

2. (20) Težnostni potencial telesa G z masno gostoto $\rho = \rho(x,y,z)$ v točki $(0,0,a)$ je dan s formulo

$$-\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{\rho(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

a. (10) Naj bo $a > 1$. Izračunajte težnostni potencial zgornje polovice krogle $K = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\}$ v točki $(0,0,a)$, če je masna gostota konstantna in enaka ρ.

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{\rho(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{\rho}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}} \\
&= -\frac{\rho}{2}\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}} \\
&= -\frac{\rho}{2}\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\left[\frac{1}{ar}\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{\rho}{2a}\int_0^1 r\,[\sqrt{r^2+a^2}-(a-r)]\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{\rho}{2a}\left[\frac{1}{3}(r^2+a^2)^{3/2}-\frac{ar^2}{2}+\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\
&= -\frac{\rho}{2a}\left(\frac{(1+a^2)^{3/2}}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}-\frac{a^3}{3}\right).
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Krogelne koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobijeva determinanta in Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte težnostni potencial v točki $(0,0,a)$ diska $D = \{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le a\}$. Predpostavite, da je $a > 1$ in je masna gostota konstantna. Kot znano upoštevajte

$$\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = u\sqrt{1+u^2}/2 + \log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)/2\,.$$

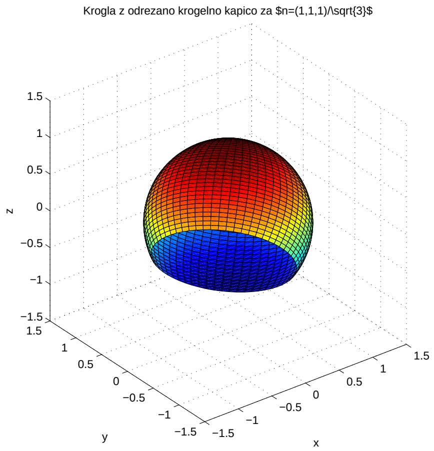
Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in računamo

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4\pi}\int_D & \frac{\rho(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{\rho}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^1\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}} \\
&= -\frac{\rho}{2}\int_0^a\mathrm{d}z\left[\sqrt{r^2+(z-a)^2}\right]_0^1 \\
&= -\frac{\rho}{2}\int_0^a\left[\sqrt{(z-a)^2+1}-(a-z)\right]\mathrm{d}z \\
&= -\frac{\rho}{4}\left[(z-a)\sqrt{(z-a)^2+1}+\log\left((z-a)+\sqrt{(z-a)^2+1}\right)-(a-z)^2\right]_0^a \\
&= -\frac{\rho}{4}\left[a\sqrt{1+a^2}-\log(-a+\sqrt{1+a^2})+\frac{a^2}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobijeva determinanta in Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $\mathbf{n}$ fiksen enotski vektor. Naj bo $\mathcal{C}$ krivulja dana kot presek površine krogle $K = \{(x,y,z) \colon x^2+y^2+z^2=1\}$ in ravnine dane z $(\mathbf{n},\mathbf{r}) = -1/2$. Krivulja $\mathcal{C}$ je rob ploskve na sliki 1 za primer $\mathbf{n} = (1,1,1,)/\sqrt{3}$. Vektorsko polje $\mathbf{F}$ naj bo dano z $\mathbf{F} = (\mathbf{n},\mathbf{r})(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$, kjer je $\mathbf{r} = (x,y,z)$.



Slika 1 Krogla K z odrezano krogelno kapico. Odrežemo z ravnino $(\mathbf{n},\mathbf{r}) = -1/2$.

a. (10) Izračunajte krivuljni integral

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Krivuljo orientirajte skladno z normalo na površino krogle, ki kaže iz krogle.

Namig: Kolikšen je skalarni produkt $(\mathbf{n},\mathbf{r})$ *na krivulji* $\mathcal{C}$*?*

Rešitev: Najprej opazimo, da je skalarni produkt $(\mathbf{n},\mathbf{r})$ *na krivulji* $\mathcal{C}$ *konstanten, saj je krivulja v ravnini definirani z* $(\mathbf{n},\mathbf{r}) = -1/2$*. Ko računamo krivuljni integral, lahko* $-1/2$ *izpostavimo. Izračunati moramo torej*

$$\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{n}\times\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Uporabimo Stokesov izrek. Vemo, da je

$$\mathbf{n}\times\mathbf{r} = (n_2z - n_3y, -n_1z + n_3x, n_1y - n_2x)\,.$$

Ugotovimo, da je

$$\mathbf{rot}(\mathbf{n}\times\mathbf{r}) = (n_1+n_1, n_2+n_2, n_3+n_3) = 2\,\mathbf{n}\,.$$

Izbrati moramo še ploskev, ki jo bom "napeli" na krivuljo. Izberimo kar krog kot na sliki 1b. Normala na krog v skladu z izbrano orientacijo je $-\mathbf{n}$*. Ploskovni integral polja je tako enak minus dvakratni ploščini kroga. Polmer kroga je* $\sqrt{3}/2$*, torej je rezultat* $3\pi/2$*.*

Ocenjevanje:

- *Konstantnost skalarnega produkta: 2 točki.*
- *Ideja s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Rotor: 2 točki.*
- *Izbira normale: 2 točki.*
- *Polmer in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ ploskev, ki jo dobimo tako, da površini krogle K odrežemo krogelno kapico z ravnino $(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = -1/2$. Za normalo na ploskev izberite tisto, ki kaže iz krogle. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Rešitev: Vemo, da je $\operatorname{div}(\mathbf{rot}(\mathbf{F})) = 0$ *za vsako polje. Po Gaussovem izreku je pretok skozi celotno površino krogle enak* 0. *Temu pretoku moramo odšteti pretok rotorja skozi odrezano ploskev. Ta pretok pa je enak krivuljnemu integralu iz a. Celoten pretok je torej* $-3\pi/2$.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gauss: 2 točki.*
- *Ideja z odštevanjem: 2 točki.*
- *Stokes v obratni smeri: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Konstruirati želimo zrcalo, ki bo vsak žarek iz izhodišča koordinatnega sistema odbilo v smeri osi x. Naj bo zgornji del zrcala graf funkcije y. Veljati mora diferencialna enačba

$$y' = \frac{y - xy'}{x + yy'}\,.$$

a. (10) Definirajte funkcijo

$$w(x) = \frac{1}{2}(x^2 + [y(x)]^2)\,.$$

Pokažite, da funkcija w ustreza diferencialni enačbi $w' = \sqrt{2w}$.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$w' = x + yy'\,.$$

Sledi

$$y' = \frac{w' - x}{y}\,.$$

Vstavimo v enačbo in upoštevajmo, da je $2w = x^2 + y^2$. *Dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{w'-x}{y} &= \frac{y - x \cdot \frac{w'-x}{y}}{w'} \\ &= \frac{y^2 - xw' + x^2}{w'y} \\ &= \frac{2w - xw'}{w'y}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$(w' - x)w' = 2w - xw'$$

ali

$$[w']^2 = 2w\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvod* w*: 2 točki.*
- *Izračun* y'*: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Upoštevanje* $x^2 + y^2 = 2w$*: 2 točki.*
- *Premetavanje in končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Rešite diferencialno enačbo za y pri začetnem pogoju $y(-a) = 0$ za $a > 0$.

Namig: Upoštevajte a.

Rešitev: Začetni pogoj za funkcijo y se prevede v začetni pogoj $w(-a) = a^2/2$ *za funkcijo* w. *Enačbo za* w *prepišemo v*

$$\frac{w'}{\sqrt{2w}} = 1\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\sqrt{2w} = x + c\,.$$

Iz začetnega pogoja sledi $a = \sqrt{2w(-a)} = -a + c$, *torej* $c = 2a$. *Sledi*

$$w(x) = \frac{1}{2}(x + 2a)^2\,.$$

Ker je $2w = x^2 + y^2$, *dobimo*

$$x^2 + y^2 = (x + 2a)^2\,.$$

Sledi

$$y = 2\sqrt{a(x + a)}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za ločljive spremenljivke: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Zveza w in y: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

5. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y^{(4)} + 2y'' + y = g(x)\,.$$

a. (10) Poiščite linearno neodvisne rešitve homogene enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2\,.$$

Ničli sta i in $-i$ in sicer dvojni. Linearno neodvisne rešitve so $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$ in $x\sin x$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničli: 2 točki.*
- *Opažanje, da sta ničli dvojni: 2 točki.*
- *Realni in imaginarni deli: 2 točki.*
- *Nabor rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poščite rešitev enačbe, če je $g(x) = \cos x$ in velja $y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$.

Rešitev: Desno stran nadomestimo z e^{ix}. Ker je i dvojna ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za partikularno rešitev $y_p(x) = Ax^2e^{ix}$, kjer je A kompleksno število. Odvajamo po vrsti in dobimo

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^{ix}(ix^2+2x) \\ y_p'' &= Ae^{ix}(-x^2+4ix+2) \\ y_p^{(3)} &= Ae^{ix}(-ix^2-6x+6i) \\ y_p^{(4)} &= Ae^{ix}(x^2-8ix-12) \end{aligned}\,.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$Ae^{ix}\big(x^2 + 2(-x^2+4ix+2) + x^2 - 8ix - 12\big) = e^{ix}\,.$$

Sledi $-8A = 1$ ali $A = -1/8$. Partikularna rešitev je realni del Ax^2e^{ix}, torej

$$y_p(x) = -\frac{x^2\cos x}{8}\,.$$

Splošna rešitev bo

$$y = -\frac{x^2\cos x}{8} + c_1\cos x + c_2 x\cos x + c_3\sin x + c_4 x\sin x\,.$$

Določiti moramo še konstante. Odvajamo in vstavimo $x = 0$. Dobimo enačbe $c_1 = 0$, $c_2 + c_3 = 0$, $-1/4 - c_1 + 2c_4 = 0$ in $-3c_2 - c_3 = 0$. Sledi $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ in $c_4 = 1/8$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek za y_p: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Konstanta A: 2 točki.*
- *Splošna rešitev in enačbe za koeficiente: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

6. (20) Naj bo $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trikrat zvezno odvedljiva funkcija. Definirajte funkcijo $u\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$u(x,t) = v(x-ct)\,.$$

Predpostavite, da funkcija u ustreza Kortweg-de Vriesovi enačbi

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0\,.$$

a. (10) Pokažite, da funkcija v ustreza diferencialni enačbi

$$-cv' + 6vv' + v''' = 0\,.$$

Rešitev: Računamo

$$u_t(x,t) = -cv'(x-ct)\,,$$

$$u_x(x,t) = v'(x-ct)\,,\ u_{xx}(x,t) = v''(x-ct) \quad \textit{in} \quad u_{xxx}(x,t) = v'''(x-ct)\,.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$-cv'(x-ct) + 6v(x-ct)v'(x-ct) + v'''(x-ct) = 0\,.$$

Enačba velja za vse x in trditev sledi.

Ocenjevanje:

- *Odvajanje po t: 2 točki.*
- *Odvajanje po x: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje po x: 2 točki.*
- *Tretje odvajanje po x: 2 točki.*
- *Vstavljanje v enačbo in sklep: 2 točki.*

b. (10) Privzemite, da velja

$$\frac{(v')^2}{2} = v^2\left(-v + \frac{c}{2}\right).$$

Pokažite, da potem v ustreza tudi diferencialni enačbi

$$-cv' + 6vv' + v''' = 0\,.$$

Poiščite splošno rešitev prve enačbe zgoraj. Izberite vedno pozitiven kvadratni koren.

Rešitev: Recimo, da je $v = v(z)$. Prvo enačbo odvajajmo dvakrat po z. Dobimo najprej

$$v'v'' = -3v^2v' + cvv'\,.$$

Pokrajšamo v' in odvajamo ponovno. Dobimo

$$v''' = -6vv' + cv'\,.$$

Prvo enačbo prepišemo v

$$v' = \sqrt{2}\, v \sqrt{-v + c/2}$$

ali

$$\frac{\mathrm{d}v}{v\sqrt{-2v+c}} = 1\,.$$

Za integriranje uvedemo novo spremenljivko $-2v + c = u^2$*, torej* $v = (c - u^2)/2$ *in* $\mathrm{d}v = -u\,\mathrm{d}u$*. Sledi*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}v}{v\sqrt{-2v+c}} &= -\int \frac{2\,\mathrm{d}u}{c-u^2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{c}} \log\left(\frac{u+\sqrt{c}}{u-\sqrt{c}}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{c}} \log\left(\frac{\sqrt{-2v+c}+\sqrt{c}}{\sqrt{-2v+c}-\sqrt{c}}\right).
\end{aligned}$$

Sledi

$$\frac{\sqrt{-2v+c}+\sqrt{c}}{\sqrt{-2v+c}-\sqrt{c}} = ae^{-\sqrt{c}z}\,,$$

kjer je a *še poljubna konstanta. Izračunamo*

$$\sqrt{-2v+c} = -\sqrt{c}\left(\frac{1+ae^{-\sqrt{c}z}}{1-ae^{-\sqrt{c}z}}\right)\,,$$

torej

$$v(z) = -\frac{1}{2}\left[c - c\left(\frac{1+ae^{-\sqrt{c}z}}{1-ae^{-\sqrt{c}z}}\right)^2\right].$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje prvič: 2 točki.*
- *Odvajanje drugič: 2 točki.*
- *Prepis diferencialne enačbe: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*