FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

16. junij 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana z

$$f(x,y,z) = z^3 - 2xz + y\,.$$

a. (10) Pokažite, da na neki okolici U točke $(1,1)$ obstaja funkcije $h\colon U \to \mathbb{R}$, taka da je $h(1,1) = 1$ in $f(x,y,h(x,y)) = 0$ za vse $(x,y) \in U$. Pokažite, da funkcija h na U nima lokalnih ekstremov.

Rešitev: Uporabimo izrek o implicitni funkciji. Preverimo najprej $f(1,1,1) = 0$. Izračunamo

$$f_z(x,y,z) = 3z^2 - 2x\,,$$

torej je $f_z(1,1,1) = 1 \neq 0$. Izrek o implicitni funkciji nam zagotavlja obstoj funkcije h na neki okolici točke $(1,1)$.

Odvajamo enakost $h^3 - 2xh + y = 0$ parcialno po y. Dobimo

$$3h^2 h_y - 2xh_y + 1 = 0\,.$$

V lokalnem ekstremu bi moralo biti $h_y(x,y) = 0$, ker pa je izpolnjena zgornja enačba, je to nemogoče.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(1,1,1) = 0$: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_z(1,1,1) \neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje po y: 2 točki.*
- *Sklep o lokalnih ekstremih: 2 točki.*

b. (10) Na neki okolici $V \subset U$ točke $(1,1)$ velja $3h^2 - 2x > 0$. Pokažite, da na V velja

$$h_{xx} + h_{yy} = -\frac{6}{3h^2 - 2x}\left(h_x^2 + h_y^2\right) + \frac{4h_x}{3h^2 - 2x}\,.$$

Namig: Odvajajte identiteto $f(x,y,h(x,y)) = 0$ parcialno po x in po y.

Rešitev: S parcialnim odvajanjem dobimo, da na V velja

$$f_x + f_z h_x = 0 \quad \textit{in} \quad f_y + f_z h_y = 0\,.$$

Odvajamo še enkrat in dobimo

$$f_{xx} + f_{xz}h_x + (f_{xz} + f_{zz}h_x)h_x + f_z h_{xx} = 0$$

in

$$f_{yy} + f_{yz}h_y + (f_{yz} + f_{zz}h_y)h_y + f_z h_{yy} = 0\,.$$

Vedno v parcialne odvode funkcije f vstavljamo točko $(x,y,h(x,y))$. Opazimo, da je, $f_{xx} = 0$, $f_{xz} = -2$, $f_{zz} = 6h$, $f_{yy} = 0$, $f_{yz} = 0$ in $f_z = 3h^2 - 2x$. Sledi

$$-2h_x + (-2 + 6hh_x)h_x + (3h^2 - 2x)h_{xx} = 0$$

in

$$6hh_y^2 + (3h^2 - 2x)h_{yy} = 0\,.$$

Seštejemo in delimo z $(3h^2 - 2x)$. *Sledi, da je*

$$h_{xx} + h_{yy} = \frac{1}{3h^2 - 2x}\left(4h_x - 6hh_x^2 - 6hh_y^2\right).$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje po x: 2 točki*
- *Odvajanje po y: 2 točki.*
- *Ponovno odvajanje po x: 2 točki.*
- *Ponovno odvajanje po y: 2 točki.*
- *Pretvarjanje: 2 točki.*

2. (20) Naj bo $0 \leq a < 1$ in naj bo $K = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ krogla s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišcu. Funkcija $f\colon K\backslash\{(0,0,a)\} \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a(x^2+y^2+z^2))^2}}\,.$$

a. (10) Izračunajte

$$I(a) = \int_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Namig: Pri integriranju po θ ločite primera $r \leq a$ in $r > a$. Vedno izberite pozitivni koren.

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate.

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}}-\frac{r}{\sqrt{r^2-2r^3a\cos\theta+a^2r^4}}\right)\mathrm{d}r\,.$$

Izbrati moramo vrstni red integriranja. Integrirajmo najprej po θ.

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}} = \frac{1}{ar}\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\,\Big|_0^{\pi}\,.$$

Pri vstavljanju mej moramo biti nekoliko previdni in vedno izbrati pozitivni koren. Za $r \geq a$ dobimo

$$\frac{1}{ar}\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\,\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{r}\,,$$

za $r < a$ pa dobimo

$$\frac{1}{ar}\sqrt{r^2-2ar\cos\theta+a^2}\,\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{a}\,.$$

Naslednji korak je integriranje po r. Integral razbijemo na dva dela.

$$\int_a^1 r^2\,\frac{2}{r}\,\mathrm{d}r = 1-a^2$$

in

$$\int_0^a r^2\,\frac{2}{a}\,\mathrm{d}r = \frac{2a^2}{3}\,.$$

Lotimo se še drugega integrala v oklepaju. Krajšamo z r in izpostavimo a^2. Integriramo najprej po θ. Dobimo

$$\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2-2r\cos\theta/a+1/a^2}}\,.$$

Ker je vedno $r < 1/a$ je rezultat integrala enak 2. Integriramo po r.

$$2\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\,.$$

Sestavimo vse dele in dobimo

$$I(a) = 2\pi\left(1 - a^2 + \frac{2a^2}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}(1 - a^2)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s krogelnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Pretvorba integrala in meje: 2 točki.*
- *Fubini in izbira vrstnega reda: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še

$$J(a) = \int_K (x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}\, f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

za $\alpha > 0$.

Rešitev: Podobno kot v a. delu naloge uvedemo krogelne koordinate in najprej integriramo po θ, potem pa še po r. Dobimo integrala

$$\int_a^1 r^\alpha\, r^2\, \frac{2}{r}\, \mathrm{d}r = \frac{2}{\alpha + 2}(1 - a^{\alpha+2})$$

in

$$\int_0^a r^\alpha\, r^2\, \frac{2}{a}\, \mathrm{d}r = \frac{2a^{\alpha+2}}{\alpha + 3}\,.$$

Drugi integral je enak $2/(\alpha + 3)$. Sestavimo

$$J(a) = \frac{4\pi}{(\alpha + 2)(\alpha + 3)}(1 - a^{\alpha+3})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Krogelne koordinate: 2 točki.*
- *Meje in Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral prvič: 2 točki.*
- *Notranji integral drugič: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Vektorsko polje naj bo dano z $\mathbf{F} = (x, xz, y)$. Naj bo $\Delta = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ piramida v prostoru.

a. (10) Zaključena pot $\mathcal{C}$ naj gre po robovih piramide z začetkom v $(0, 0, 0)$. Po vrsti so točke $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ in spet $(0, 0, 0)$. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Na pot "napnemo" ploskev, ki sestoji iz lica piramide v xz-ravnini in lica piramide v yz-ravnini. V skladu s smerjo poti izberemo normalo na ploskev, ki kaže iz piramide. Izračunamo

$$\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (1 - x, 0, z)\,.$$

Po Stokesovem izreku je krivljni integral enak ploskovnemu integralu rotorja po izbrani ploskvi. Normala na lice v xz-ravnini je $(0, -1, 0)$. Rotor je na tej ploskvi pravokoten na normalo in je ploskovni integral enak 0. Normala na lice v yz-ravnini je $(-1, 0, 0)$, na tem licu pa je $x = 0$. Ploskovni integral je enak $-1/2$, ker je ploščina lica enaka $1/2$.

Ocenjevanje:

- *Ideja s Stokesom: 2 točki.*
- *Izbira ploskve: 2 točki.*
- *Izračun rotorja: 2 točki.*
- *Integrala po licih: 2 točki.*
- *Krivuljni integral: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še pretok polja skozi del površine piramide, ki je vsebovan v koordinatnih ravninah. Za normalo izberite vedno vektor, ki kaže iz piramide.

Rešitev: Izračunamo $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 1$. Po Gaussovem izreku je pretok skozi $\partial\Delta$ enak $1/6$, ker je $1/6$ prostornina piramide Odšteti moramo pretoke skozi lice, ki ni vsebovano v koordinatnih ravninah. Ta del je graf funkcije $f(x, y) = 1 - x - y$ nad trikotnikom $T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Po formuli je pretok enak

$$\begin{aligned}
\int_T (-f_x F_1 - f_y F_2 + F_3)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_T (x + x(1 - x - y) + y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (2x - x^2 + y(1 - x))\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left((2x - x^2)(1 - x) + \frac{1}{2}(1 - x)^3\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{8}\,.
\end{aligned}$$

Iskani pretok je $1/6 - 3/8 = -5/24$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Gaussom: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Formula za integral po grafu: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) V rezervar priteka voda s pretokom β in koncentracijo soli enako b. Iz rezervarja odteka voda s pretokom α. V trenutku $t = 0$ je v rezervarju V_0 vode, v kateri ni soli, tako da je koncentracija enaka 0. Volumen vode v času t je $V_0+(\beta-\alpha)t$. Predpostavite, da je $\alpha > \beta > 0$. Označite s $q(t)$ količino soli v rezervarju v trenutku t. Za q velja enačba

$$\dot{q} + \frac{\alpha q}{V_0 + (\beta - \alpha)t} = \beta b\,.$$

a. (10) Poiščite splošno rešitev enačbe.

Rešitev: Gre za linerno diferencialno enačbo prvega reda. Najprej poiščemo rešitev homogenega dela. Prepišemo

$$\frac{\dot{q}_h}{q_h} = -\frac{\alpha}{V_0 + (\beta - \alpha)t}\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\log(q_h) = -\frac{\alpha}{(\beta - \alpha)} \log\big(V_0 + (\beta - \alpha)t\big)\,.$$

Sledi

$$q_h(t) = \big(V_0 + (\beta - \alpha)t\big)^{-\alpha/(\beta-\alpha)}\,.$$

Partikularno rešitev iščemo z nastavkom $q_p(t) = c(t)q_h(t)$. *Veljati mora*

$$\dot{c} = \frac{\beta b}{q_h} = \beta b\big(V_0 + (\beta - \alpha)t\big)^{\alpha/(\beta-\alpha)}\,.$$

Z integriranjem dobimo

$$c(t) = \frac{\beta b}{\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha} + 1\right)} \cdot \frac{1}{(\beta - \alpha)} \big(V_0 + (\beta - \alpha)t\big)^{\alpha/(\beta-\alpha)+1}\,.$$

Partikularna rešitev bo

$$q_p(t) = c(t)q_h(t) = b\big(V_0 + (\beta - \alpha)t\big)\,.$$

Splošno rešitev dobimo kot

$$q(t) = b\big(V_0 + (\beta - \alpha)t\big) + c\big(V_0 + (\beta - \alpha)t\big)^{-\alpha/(\beta-\alpha)}$$

za neko konstanto c.

Ocenjevanje:

- *Rešitev homogene enačbe: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) V trenutku $t_0 = V_0/(\alpha - \beta)$ bo rezervar prazen. Kolikšna je koncentracija soli tik pred trenutkom t_0?

Rešitev: Iz besedila naloge sledi, da je $q(0) = 0$. Za konstanto c v splošni rešitvi mora veljati

$$q(0) = 0 = bV_0 + cV_0^{-\alpha/(\beta-\alpha)}\,.$$

Sledi, da je

$$c = -bV_0^{\alpha/(\beta-\alpha)+1} = -bV_0^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}$$

torej je rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju enaka

$$q(t) = b\big[\big(V_0 + (\beta-\alpha)t\big) - V_0^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\big(V_0 + (\beta-\alpha)t\big)^{-\alpha/(\beta-\alpha)}\big]\,.$$

Označimo s $k(t)$ koncentracijo soli v trenutku t. Velja

$$k(t) = \frac{q(t)}{V_0 + (\beta-\alpha)t}\,.$$

Vstavimo t_0 in dobimo

$$k(t_0) = b\,.$$

Ocenjevanje:

- *Enačba za konstanto c: 2 točki.*
- *Konstanta c: 2 točki.*
- *Funkcija $k(t)$: 2 točki.*
- *Ideja z vstavljanjem t_0: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Funkcija $\mathbf{y}$ naj ustreza sistemu diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -2b \end{pmatrix} \mathbf{y}\,,$$

kjer sta $a > 0$ in $b > 0$ dani konstanti. Predpostavite, da je $b^2 - a = -\gamma^2 < 0$.

a. (10) Poiščite linearno neodvisni rešitvi zgornjega sistema enačb.

Rešitev: Izračunamo najprej karakteristični polinom. Dobimo

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2b\lambda + a\,.$$

Rešitvi sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a}}{2} = -b \pm i\gamma\,.$$

Dobimo konjugirano kompleksni ničli. Poiščimo še lastni vektor $\mathbf{z}$. *Veljati mora*

$$\begin{pmatrix} b - i\gamma & 1 \\ -a & -b - i\gamma \end{pmatrix} \mathbf{z} = 0\,.$$

Sledi

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ b - i\gamma \end{pmatrix}\,.$$

Linearno neodvisni rešitvi dobimo kot realni in imaginarni del produkta

$$\mathbf{z} = e^{-bt} \begin{pmatrix} -\cos(\gamma t) - i\sin(\gamma t) \\ b\cos(\gamma t) + \gamma\sin(\gamma t) + i(-\gamma\cos(\gamma t) + b\sin(\gamma t)) \end{pmatrix}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Lastne vrednosti in lastni vektor: 2 točki.*
- *Nastavek za rešitvi: 2 točki.*
- *Ločitev realnega in imaginarnega dela: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*

b. (10) Rešite še nehomogeno enačbo

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -2b \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(0) = 0$.

Rešitev: Potrebujemo partikularno rešitev. Ker je na desni strani konstanten vektor, bo tudi partikularna rešitev konstantni vektor $\mathbf{x}$, *ki ustreza enačbi*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -2b \end{pmatrix} \mathbf{x} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Enačba ima rešitev $\mathbf{x} = (1/a, 0)$. *Splošna rešitev bo oblike*

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Y} \cdot \mathbf{c}$$

za nek vektor $\mathbf{c}$. *Začetni pogoj zahteva* $\mathbf{c} = -(1/a, 0)$.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je partikularna rešitev konstanta: 2 točki.*
- *Nastavek: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

6. (20) Stacionarni tok nestisljivega viskoznega fluida med dvema vzporednima okroglima cevema s premeroma $R_1 < R_2$ z osjo simetrije v smeri osi x naj bo opisan s poljem $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, pri čemer je zaradi simetrije komponenta v odvisna le od razdalje $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ od skupne osi obeh cevi, torej $v(x, y, z) = v(r)$. Polje $\mathbf{v}$ mora ustrezati Navier-Stokesovim enačbam

$$\rho \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \, \Delta \mathbf{v}$$

z robnimi pogoji $v(R_1) = v(R_2) = 0$ (na stenah je hitrost enaka 0).

a. (10) Izračunajte $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Pokažite, da je $\Delta \mathbf{v} = (v''(r) + \frac{1}{r} v'(r), 0, 0)$. Izpeljite, da je v primeru, ko je tlak odvisen le od x, torej $p(x, y, z) = p(x)$, zadoščeno Navier-Stokesovim enačbam, če velja

$$0 = -p'(x) + \mu(v''(r) + \frac{1}{r}\, v'(r)) \,.$$

Rešitev: Matrika $\nabla \mathbf{v}$ ima od nič različne elemente le v prvi vrstici. Označimo odvod funkcije $v(r)$ po spremenljivki $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ z $v'(r)$. S parcialnim odvajanjem dobimo

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & v'(r)\frac{y}{r} & v'(r)\frac{z}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sledi $\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. S ponovnim parcialnim odvajanjem dobimo, da je

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y, z) = v''(r)\frac{y^2}{r^2} + v'(r)\frac{z^2}{r^3} \,.$$

Na povsem podoben način izračunamo še drugi parcialni odvod v po z. Seštejemo in dobimo

$$\Delta v(x, y, z) = v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) \,.$$

Sledi

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Opazimo, da je $\nabla p(x, y, z) = (p'(x), 0, 0)$. Enačbo, ki ji mora ustrezati funkcija v, dobimo z vstavljanjem v Navier-Stokesove enačbe in primerjanjem prvih komponent.

Ocenjevanje:

- *Definicija $\nabla \mathbf{v}$: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje in množenje: 2 točki.*
- *Drugi parcialni odvod v: 2 točki.*
- *Seštevanje in Laplace: 2 točki.*
- *Vstavljanje v enačbe: 2 točki.*

b. (10) Iz Navier-Stokesovih enačb sledi, da za tlak velja $\nabla p(x,y,z) = (p_0, 0, 0)$ za neko konstanto p_0. Pokažite, da polje $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ z

$$v(r) = \frac{p_0}{4\mu}\left(r^2 - R_2^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log(R_2/R_1)}\log(r/R_2)\right)$$

ustreza Navier-Stokesovim enačbam, vključno z robnimi pogoji.

Rešitev: Preverimo najprej robne pogoje. Z vstavljenjem $r = R_2$ *takoj sledi* $v(R_2) = 0$. *Vstavimo* $r = R_1$. *Dobimo*

$$\begin{aligned} v(R_1) &= \frac{p_0}{\mu}\left(R_1^2 - R_2^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log(R_2/R_1)}\log(R_1/R_2)\right) \\ &= \frac{p_0}{\mu}\left(R_1^2 - R_2^2 - (R_1^2 - R_2^2)\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

V delu a. naloge smo ugotovili, da bo zadoščeno Navier-Stokesovim enačbam, če bo

$$0 = -p_0 + \mu(v''(r) + \frac{1}{r}v'(r))\,.$$

Odvajamo in dobimo

$$v'(r) = \frac{2p_0}{4\mu}(r + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log(R_2/R_1)}\frac{1}{r})$$

in

$$v''(r) = \frac{2p_0}{4\mu}(1 - \frac{R_1^2 - R_2^2}{\log(R_2/R_1)}\frac{1}{r^2})\,.$$

Seštejemo in dobimo

$$v''(r) + \frac{1}{r}\,v'(r) = \frac{p_0}{\mu}\,.$$

Sledi

$$0 = -p_0 + \mu\Delta v\,.$$

Ocenjevanje:

- *Robni pogoj za* R_2*: 2 točki.*
- *Robni pogoj za* R_1*: 2 točki.*
- *Izračun* v'*: 2 točki.*
- *Izračun* v''*: 2 točki.*
- *Vstavljanje in preverjanje: 2 točki.*