FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

3. september 2001

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: ________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bosta $U, V \subset \mathbb{R}^2$ odprti množici v ravnini. Naj bo $f: V \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva. Naj bosta $u, v: U \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji, za kateri veljajo enačbe

$$u_x = v_y \qquad \text{in} \qquad u_y = -v_x \,,$$

ter

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \quad \text{in} \quad v_x^2 + v_y^2 = 1 \,.$$

a. (10) Pokažite, da na U velja $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Rešitev: Iz predpostavk sledi, da je $u_{xx} = v_{xy}$ in $u_{yy} = -v_{yx}$. Ker je v dvakrat zvezno odvedljiva je $v_{xy} = v_{yx}$, zato je $u_{xx} = -u_{yy}$, kar smo želeli pokazati. Podobno računamo za v.

Ocenjevanje:

- *Ideja: 2 točki.*
- *Prvo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Opažanje, da je $v_{xy} = v_{yx}$: 2 točki.*
- *Sklepa: 2 točki.*

b. (10) Definirajte funkcijo $F: U \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)) \,.$$

Označite $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$. Pokažite, da velja

$$f_{uu}(u, v) + f_{vv}(u, v) = F_{xx}(x, y) + F_{yy}(x, y) \,.$$

Namig: Uporabite a., tudi če ne znate pokazati.

Rešitev: Računamo

$$F_x = f_u u_x + f_v v_x$$

in

$$F_{xx} = (f_{uu} u_x + f_{uv} v_x) u_x + f_u u_{xx} + (f_{uv} u_x + f_{vv} v_x) v_x + f_v v_{xx} \,.$$

Podobno dobimo

$$F_{yy} = (f_{uu} u_y + f_{uv} v_y) u_y + f_u u_{yy} + (f_{uv} u_y + f_{vv} v_y) v_y + f_v v_{yy} \,.$$

Če izpostavimo f_{uu} ali f_{vv}, dobimo, upoštevajoč predpostavke, koeficient 1. Če izpostavimo f_{uv}, dobimo koeficient 0. V a. smo pokazali, da je $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

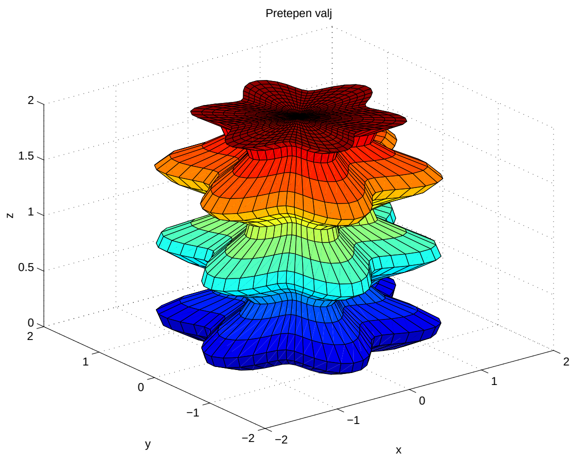
Ocenjevanje:

- *Prvo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Prvo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Izpostavljanje členov in sklep: 2 točki.*

2. (20) Na sliki 1 je valj, ki so ga pretepli v baru *Trda pest.* V cilindričnih koordinatah je pretepeni valj dan s

$$H = \{(r, \phi, z) \colon 0 \leq r \leq (1 + a \sin 6\phi)(1 + b \sin 3z), 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\pi\},$$

kjer je $0 < a, b < 1$.



Sl. 1 Pretepeni valj.

a. (10) Izračunajte prostornino pretepenega valja.

Rešitev: Označimo prostornino z V. Računamo v cilindričnih koordinatah.

$$\begin{aligned}
V &= \int_H r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{(1+a\sin 6\phi)(1+b\sin 3z)} r \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + b \sin 3z)^2 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} (1 + a \sin 6\phi)^2 \, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2a \sin 3z + a^2 \sin^2 3z) \, \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} (1 + 2b \sin 6\phi + b^2 \sin^2 6\phi) \, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\pi^2}{2} (2 + a^2)(2 + a^2) \, .
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Meje v cilindričnih koordinatah: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Prostornina: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še ploščino zgornje ploskve valja.

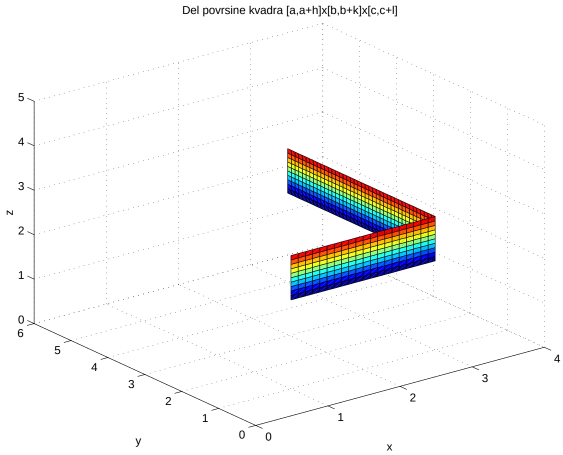
Rešitev: Označimo ploščino s P. Računamo v polarnih koordinatah.

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{1+a\sin 6\phi} r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+a\sin 6\phi)^2\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+2a\sin 6\phi + a^2\sin^2 6\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2}(2\pi + a^2\pi) \\
&= \frac{\pi}{2}(2+a^2)\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s polarnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva. Vektorsko polje naj bo definirano s predpisom $\mathbf{F} = (y\phi(z), x\phi(z), \phi(z))$.



Sl. 2 Del površine kvadra Q.

a. (10) Naj bo $Q = [a, a+h] \times [b, b+k] \times [c, c+l]$ kvader v prostoru. Pokažite, da je pretok vektorskega polja skozi površino kvadra enak $hk(\phi(c+l) - \phi(c))$. Za normalo izberite vektor, ki kaže iz kvadra.

Rešitev: Uporabimo Gaussov izrek. Najprej opazimo, da je $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \phi'(z)$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial Q} \mathbf{F}\, \mathrm{dS} &= \int_Q \mathrm{div}(\mathbf{F})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\
&= \int_a^{a+h} \mathrm{d}x \int_b^{b+k} \mathrm{d}y \int_c^{c+l} \phi'(z)\, \mathrm{d}z \\
&= hk\phi(z)\Big|_c^{c+l} \\
&= hk(\phi(c+l) - \phi(c))\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja uporabiti Gaussa: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Meje integrala: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Newton-Leibniz in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathcal{S}$ ploskev na sliki 2 sestavljena iz dveh ploskev kvadra Q vzporednih osi z. Ena od stranskih ploskev je tista, za katero je $y = b$, druga pa tista, za katero je $x = a + h$. Izračunajte

$$\int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Za normalo izberite vektor, ki kaže iz kvadra, rob ploskve pa orientirajte skladno z izbiro normale.

Rešitev: Uporabili bomo Stokesov izrek. Izračunamo $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = (-\phi'(z)x, \phi'(z)y, 0)$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}\mathbf{S} \\
&= -\int_{[a,a+h]\times[c,c+l]} \phi'(z) b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \int_{[b,b+k]\times[c,c+l]} \phi'(z)(a+h)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= -bh(\phi(c+l)-\phi(c)) - (a+h)k(\phi(c+l)-\phi(c)) \\
&= -(\phi(c+l)-\phi(c))((a+h)k+bh)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s Stokesovim izrekom: 2 točki.*
- *Rotor: 2 točki.*
- *Integral, meje za prvo ploskev: 2 točki.*
- *Integral, meje za drugo ploskev: 2 točki.*
- *Fubini, Newton-Leibniz, rezultat: 2 tocki.*

4. (20) Telo vržemo navpično navzgor s površja zemlje. Označimo hitrost telesa v trenutku t z $v(t)$. Ko bo telo začelo padati nazaj proti zemlji, bo hitrost negativna. Ob upoštevanju zračnega upora, bo hitrost telesa opisovala diferencialna enačba

$$m\dot{v} = -mg - kv\,,$$

kjer je m masa telesa, g zemeljski pospešek in k konstanta.

a. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza začetnemu pogoju $v(0) = v_0 > 0$.

Rešitev: Enačba je nehomogena linearna prvega reda. Homogena rešitev je $v(t) = e^{-kt/m}$. Za nehomogeno enačbo poskusimo s konstanto. Hitro se prepričamo, da je konstanta $-mg/k$ partikularna rešitev enačbe. Splošna rešitev bo torej

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + ce^{-kt/m}$$

za neko konstanto c. Ustreči moramo še začetnemu pogoju, torej

$$v_0 = v(0) = -\frac{mg}{k} + c\,.$$

Sledi

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Homogeni del: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) Kako visoko bo telo, ko bo doseglo najvišjo točko svoje trajektorije?

Namig: V trenutku t bo telo na višini $\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s$. Kolikšna bo v tistem trenutku histrost telesa?

Rešitev: Označimo z $x(t)$ oddaljenost telesa od površja zemlje v trenutku $t \geq 0$. Ker poznamo hitrost telesa, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left(v_0 e^{-ks/m} - \frac{mg}{k}(1 - e^{-ks/m})\right) \mathrm{d}s \\
&= \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-kt/m}) - \frac{mg}{k}(t - \frac{m}{k}(1 - e^{-kt/m})) \\
&= \frac{kmv_0 + mg}{k^2}(1 - e^{-kt/m}) - \frac{mgt}{k}\,.
\end{aligned}$$

Označimo trenutek, ko bo telo najvišje, s t_0. *Hitrost v tem trenutku bo enaka* 0, *torej mora veljati*

$$0 = v_0 e_0^{-kt_0/m} - \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt_0/m}) .$$

Sledi

$$e^{-kt_0/m}(v_0 + \frac{mg}{k}) = \frac{mg}{k}$$

ali

$$t_0 = \frac{m}{k} \log\left(\frac{v_0 k + mg}{mg}\right) .$$

Najvišja točka bo torej

$$\frac{kmv_0 + mg}{k^2}(1 - e^{-kt_0/m}) - \frac{mgt_0}{k} = \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \log\left(\frac{v_0 k + mg}{mg}\right) .$$

Ocenjevanje:

- *Integriranje: 2 točki.*
- *Enačba za* t_0*: 2 točki.*
- t_0*: 2 točki.*
- *Ideja z vstavljanjem* t_0*: 2 točki.*
- *Največja višina: 2 točki.*

5. (20) Sistem diferencialnih enačb naj bo dan z

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{z}\,.$$

a. (10) Poiščite fundamentalno matriko rešitev homogenega sistema.

Rešitev: Karakteristični polinom matrike sistema je enak $P(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$ *z ničlama* $a + ib$ *in* $a - ib$*. Potrebujemo le lastni vektor, ki pripada prvi ničli. Zlahka se prepričamo, da je to vektor* $\mathbf{x} = (1, -i)$*. Linearno neodvisni rešitvi preberemo kot*

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{y}_2(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \end{pmatrix}.$$

Če drugi rešitvi spremenimo predznak, ti linearno neodvisni rešitvi že zadoščata zahtevam za stolpce fundamentalne matrike rešitev. Sledi

$$\mathbf{Y}(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničla in lastni vektor: 2 točki.*
- *Prva rešitev: 2 točki.*
- *Linearno neodvisna rešitev: 2 točki.*
- *Fundamentalna matrika rešitev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{z}(t) = -a(\cos bt, \sin bt)$. Poiščite rešitev nehomogene enačbe pri začetnem pogoju $\mathbf{y}(0) = (1, 0)$.

Rešitev: Partikularno rešitev dobimo po formuli

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_p(t) &= \int_0^t \mathbf{Y}(t-s)\,\mathbf{z}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -a \int_0^t e^{a(t-s)} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= -a \int_0^t e^{a(t-s)} \begin{pmatrix} \cos b(t-s) \cos bs - \sin b(t-s) \sin bs \\ \sin b(t-s) \cos bs + \cos b(t-s) \sin bs \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \int_0^s (-a) e^{a(t-s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} (1 - e^{at})\,.
\end{aligned}$$

Zadostiti moramo še začetnemu pogoju. Hitro vidimo, da lahko prištejemo kar prvi stolpec fundamentalne matrike resitev. Iskana rešitev je torej

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} .$$

Ocenjevanje:

- *Formula za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Poenostavljanje členov in integriranje: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*

6. (20) Motorju mopeda njegov cilinder vsiljuje nihanje, ki ga v prvem približku opisuje diferencialna enačba

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + k^2x = \alpha\omega^2(\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 2\omega t)\,.$$

Pri tem je $\omega = 2\pi n$, kjer je n število obratov na sekundo in $k = 4d$ in $d > 0$. Funkcija $x(t)$ je ustrezno merjeni odmik od ravnovesnega stanja.

a. (10) Poiščite partikularno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Najprej najdemo ničle karakterističnega polinoma. Dobimo

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2d\lambda + 16d^2$$

z ničlama $-d \pm id\sqrt{15}$. *Nehomogeno enačbo rešujemo posebej za vsak člen na desni. Najprej nadomestimo desno stran z* $\alpha\omega^2e^{i\omega t}$ *in rešitev iščemo z nastavkom* $A_1e^{i\omega t}$. *Dobimo*

$$-A_1\omega^2e^{i\omega t} + 2di\omega A_1e^{i\omega t} + k^2A_1e^{i\omega t} = \alpha\omega^2e^{i\omega t}\,.$$

Krajšamo in dobimo

$$A_1(-\omega^2 + 2di\omega + k^2) = \alpha\omega^2$$

ali

$$A_1 = \frac{\alpha\omega^2(k^2 - \omega^2 - 2di\omega)}{(-\omega^2 + k^2)^2 + 4d^2\omega^2}\,.$$

Podobno postopamo z drugim členom na desni. Računamo z nastavkom $A_2e^{2i\omega t}$. *Dobimo enačbo*

$$-4A_2\omega^2 + 4A_2id + A_2k^2 = \frac{1}{4}\alpha\omega^2\,,$$

torej

$$A_2 = \frac{\alpha\omega^2(-4\omega^2 + k^2 - 4id)}{4[(-4\omega^2 + k^2)^2 + 16d^2]}\,.$$

Partikularna rešitev je realni del produkta $A_1e^{i\omega t} + A_2e^{2i\omega t}$, *torej*

$$x_p = \alpha\omega^2\left(\frac{(k^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2d\omega\sin\omega t}{(-\omega^2 + k^2)^2 + 4d^2\omega^2} + \frac{(k^2 - 4\omega^2)\cos 2\omega t + 4d\omega\sin 2\omega t}{4[(-4\omega^2 + k^2)^2 + 16d^2\omega^2]}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Nastavek za prvi člen: 2 točki.*
- *Nastavek za drugi člen: 2 točki.*
- *Prvi člen: 2 točki.*
- *Drugi člen: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe pri začetnem pogoju $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Namig: Računajte s kompleksnimi števili.

Rešitev: Označimo $\gamma = -d + id\sqrt{15}$. *Splošna rešitev enačbe bo realni del funkcije*

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{2i\omega t} + c_1 e^{\gamma t} + c_2 e^{\bar{\gamma} t}\,.$$

Če želimo zadostiti začetnim pogojem, mora veljati

$$x(0) = A_1 + A_2 + c_1 + c_2 = 0$$

in

$$\dot{x}(0) = \omega A_1 + 2\omega A_2 + c_1\gamma + c_2\bar{\gamma} = 0\,.$$

Pomnožimo prvo enačbo z γ *in jo odštejmo od druge. Sledi*

$$A_1(\omega - \gamma) + A_2(2\omega - \gamma) - 2id\sqrt{15}c_2 = 0$$

torej

$$c_2 = \frac{A_1(\omega - \gamma) + A_2(2\omega - \gamma)}{2id\sqrt{15}}\,.$$

Podobno dobimo

$$c_1 = -\frac{A_1(\omega - \bar{\gamma}) + A_2(2\omega - \bar{\gamma})}{2id\sqrt{15}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Vrednost* $x_p(0)$ *in* $\dot{x}_p(0)$*: 2 točki.*
- *Enačbi za koeficiente: 2 točki.*
- c_1*: 2 točki.*
- c_2*: 2 točki.*