FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

17. september 2001

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana z

$$f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\,.$$

a. (10) Poiščite točki, kjer bi lahko bil maksimum funkcije $g(x,y) = x^2 + y^2$ pri pogoju $f(x,y) = 0$.

Rešitev: Po Lagrangeu sestavimo funkcijo $F(x,y) = g(x,y) - \lambda f(x,y)$. Odvajamo parcialno po x in y in odvode izenačimo z 0.

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= 2x - \lambda(10x - 6y) = 0 \\ F_y(x,y) &= 2y - \lambda(10y - 6x) = 0 \end{aligned}$$

Dobimo homogeni sistem dveh linearnih enačb oblike

$$\begin{array}{lcll} (2-10\lambda)x & + & 6\lambda y & = 0 \\ 6\lambda x & + & (2-10\lambda)y & = 0 \end{array}$$

Zanimajo nas samo rešitve, za katere je $f(x,y) = 0$, torej mora biti rang matrike sistema enak 1. To se zgodi, če je determinanta enaka 0, zato mora biti

$$(2-10\lambda)^2 - 36\lambda^2 = 4 - 40\lambda + 64\lambda^2 = 0\,.$$

Zgornja enačba ima rešitvi $\lambda_1 = 1/8$ in $\lambda_2 = 1/2$. Za λ_1 dobimo, da je $x = -y$, za λ_2 pa $x = y$. Ker mora točka (x,y) ustrezati še enačbi $f(x,y) = 0$, dobimo za λ_1 enačbo

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 8 = 0$$

ali $x = \pm\sqrt{2}/2$. Točki sta $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ in $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Za λ_2 dobimo podobno točki $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Ker iščemo maksimum funkcije $g(x,y)$ pri danih pogojih, sta kandidatki samo točki $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek po Lagrangeu: 2 točki.*
- *Parcialni odvajanji: 1+1 točka.*
- *Ideja s homogenim sistemom: 2 točki.*
- *Lambde in lastni vektorji: 2 točki.*
- *Končni točki: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da v neki okolici U točke $x_0 = \sqrt{2}$ obstaja taka funkcija $h(x)$, da je $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ in $f(x, h(x)) = 0$. Izračunajte drugi odvod funkcije $k(x) = x^2 + h^2(x)$ v točki $x_0 = \sqrt{2}$.

Rešitev: Označimo $x_0 = y_0 = \sqrt{2}$. Najprej preverimo, da je $f(x_0, y_0) = 0$. Po izreku o implicitni funkciji bo obstajala želena funkcija $h(x)$, če je $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Odvajamo in dobimo

$$f_y(x,y) = -6x + 10y\,.$$

Očitno je $f_y(x_0, y_0) = 4\sqrt{2} \neq 0$. Za drugi odvod funkcije $k(x)$ računamo

$$k'(x) = 2x + 2h(x)h'(x)$$

in

$$k''(x) = 2 + 2(h'(x))^2 + 2h(x)h''(x)\,.$$

Računamo

$$h'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -1\,.$$

Za drugi odvod $h(x)$ *odvajamo* $f(x, h(x)) = 0$ *parcialno po* x *dvakrat. Dobimo*

$$f_x + f_y h' = 0$$

in

$$f_{xx} + f_{xy}h' + (f_{xy} + f_{yy}h')h' + f_y h'' = 0\,.$$

Upoštevamo še $h'(x_0) = -1$ *in dobimo*

$$10 + 6 - (-6 - 10) \cdot 1 + 4\sqrt{2}h''(x_0) = 0\,.$$

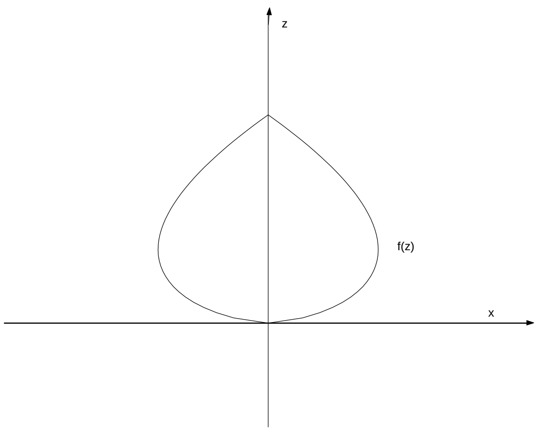
ali $h''(x_0) = -8/\sqrt{2}$. *Vstavimo še v izraz za drugi odvod* $k(x)$ *in dobimo*

$$k''(x_0) = 2 + 2 - 2\sqrt{2} \cdot 8/\sqrt{2} = -12\,.$$

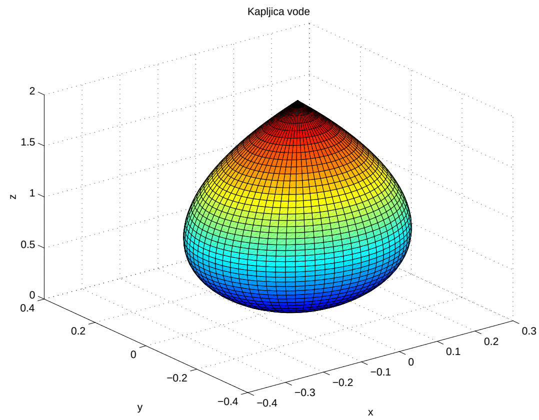
Ocenjevanje:

- *Preverjanje predpostavk za izrek o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Odvajanje* $f(x, h(x))$ *prvič: 2 točki.*
- *Odvajanje* $f(x, h(x))$ *drugič: 2 točki.*
- $h''(x_0)$*: 2 točki.*
- $k''(x_0)$*: 2 točki. in dobimo*
-
-

2. (20) Če pozitivno funkcijo $f(z)$ dano na intervalu $[0,h]$ kot na sliki 1a zavrtimo okrog osi z, opiše rotacijsko telo, ki ga vidite na sliki 1b.



Sl. 1a Funkcija $f(z)$.



Sl. 1b Rotacijsko telo, ki ga opiše $f(z)$.

a. (10) Pokažite, da dobimo prostornino in površino takega rotacijskega telesa po formulah

$$V = \pi \int_0^h [f(z)]^2 \, \mathrm{d}z \qquad \text{in} \qquad P = 2\pi \int_0^h f(z) \sqrt{1 + [f'(z)]^2} \, \mathrm{d}z \, .$$

Namig: Za površino vzemite parametrizacijo $\Phi(\phi, z) = (f(z)\cos\phi, f(z)\sin\phi, z)$.

Rešitev: Za prostornino uvedemo cilindrične koordinate. Računamo

$$\begin{aligned} V &= \int_V \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{f(z)} r \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{[f(z)]^2}{2} \, \mathrm{d}z \\ &= \pi \int_0^h [f(z)]^2 \, \mathrm{d}z \, . \end{aligned}$$

Za izračun površine potrebujemo vektorja Φ_ϕ *in* Φ_z*. S parcialnim odvajanjem dobimo, da je*

$$\Phi_\phi = \begin{pmatrix} -f(z)\sin\phi \\ f(z)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathit{in} \qquad \Phi_z = \begin{pmatrix} f'(z)\cos\phi \\ f'(z)\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Sledi

$$\Phi_\phi \times \Phi_z = \begin{pmatrix} f(z)\cos\phi \\ f(z)\sin\phi \\ -f'(z)\, f(z) \end{pmatrix} ,$$

torej

$$|\Phi_\phi \times \Phi_z| = f(z) \sqrt{1 + [f'(z)]^2} \, .$$

Računamo

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^h f(z)\sqrt{1+[f'(z)]^2}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^h f(z)\sqrt{1+[f'(z)]^2}\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Fubini in zunanji itegral: 2 točki.*
- Φ_ϕ *in* Φ_z*: 2 točki.*
- $|\Phi_\phi \times \Phi_z|$*: 2 točki.*
- *Fubini in zunanji integral: 2 točki.*

b. (10) Izpeljite še formulo za masni vztrajnostni moment telesa okrog osi z. Privzemite, da je masna gostota enaka $\rho = 1$.

Rešitev: Izračunati moramo

$$\int_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Z uvedbo cilindričnih koordinat dobimo

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{f(z)} r^3\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^h [f(z)]^4\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za* I_{zz}*: 2 točki.*
- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobian in Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Naj bo $\mathbf{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje v $\mathbb{R}^3$, za katerega je $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = 0$ in naj bo $\mathbf{a}$ dan fiksen vektor.

a. (10) Dokažite, da je za poljubno področje $G \subset \mathbb{R}^3$ pretok skozi površino

$$\int_{\partial G} (\mathbf{a} \times \mathbf{F})\, \mathrm{d}\mathbf{S} = 0\,.$$

Rešitev: Izračunamo

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{F}) &= -a_1(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}) - a_2(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}) - a_3(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \\ &= -\mathbf{a} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{F}) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Po Gaussovem izreku je pretok tega vektorskega polja skozi površino poljubnega telesa v $\mathbb{R}^3$ enak integralu divergence, kar je 0.

Ocenjevanje:

- *Divergenca: 4 točki.*
- *Opažanje, da je divergenca enaka 0: 4 točke.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{F} = (x - y + 3z, -x - y + z, 3x + y + z)$. Izračunajte

$$\int_{\partial\Delta} \mathbf{a} \times \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

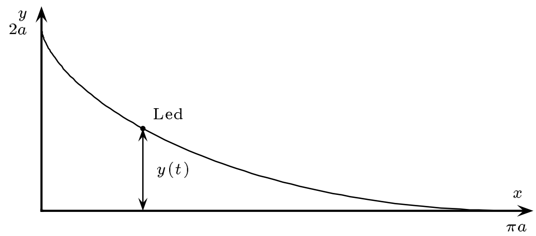
kjer je $\Delta = \{(x, y, z) \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Rešitev: Rotor polja $\mathbf{F}$ je enak 0, kar ugotovimo s preprostim računom. Iskani pretok je enak 0.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je rotor enak 0: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Citiranje Gaussovega izreka: 2 točki.*
- *Izračun pretoka: 4 točke.*

4. (20) Košček ledu pod vplivom težnosti drsi brez trenja po krivulji cikloidi na sliki 2.



Sl. 2 Cikloida, po kateri drsi košček ledu.

V času $t = 0$ košček spustimo iz točke $(a(\pi/2 - 1), a)$. Označimo z $y(t)$ višino (y-koordinato) koščka v času t in definirajmo funkcijo

$$\theta(t) = \arccos(\frac{y - a}{a})\,.$$

Funkcija $\theta(t) \geq \pi/2$ ustreza diferencialni enačbi

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sqrt{\frac{\cos\theta}{\cos\theta - 1}}\,.$$

a. (10) Pokažite, da pri začetnem pogoju $\theta(0) = \pi/2$ velja

$$\sqrt{2}\,\cos(\theta/2) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}} \cdot t\right)\,.$$

Namig:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{-\cos\theta}} = \frac{\sqrt{2}\sin(\theta/2)}{\sqrt{1 - 2\cos^2(\theta/2)}}\,.$$

Rešitev: Prepišimo

$$\frac{\dot{\theta}\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\,.$$

Za rešitev moramo poiskati integral

$$\int \frac{\sqrt{1 - \cos\theta} \cdot \mathrm{d}\theta}{\sqrt{-\cos\theta}}\,.$$

Uvedimo novo spremenljivko $t = \cos(\theta/2)$, *torej* $2\mathrm{d}t = -\sin(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1 - \cos\theta} \cdot \mathrm{d}\theta}{\sqrt{-\cos\theta}} &= \int \frac{\sqrt{2}\,\sin(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - 2\cos^2(\theta/2)}} \\
&= -2\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - 2t^2}} \\
&= 2\arccos(\sqrt{2}t) \\
&= 2\arccos(\sqrt{2}\cos(\theta/2))\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$2\arccos(\sqrt{2}\cos(\theta/2)) = \sqrt{\frac{g}{a}}(t+c)\,.$$

Določimo konstanto c. Vstavimo $t = 0$ na obeh straneh in upoštevamo začetni pogoj $\theta(0) = \pi/2$. Dobimo enačbo

$$0 = \sqrt{\frac{g}{a}}c\,,$$

torej $c = 0$. Sledi

$$\sqrt{2}\,\cos(\theta/2) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\cdot t\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v obliko za integriranje: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Integrael: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Končna identiteta: 2 točki.*

b. (10) V kolikšnem času bo koššek "pridrsal" z višine $y = a$ na višino $y = 0$, ko je $\theta = \pi$?

Namig: Uporabite a., tudi če ne znate dokazati.

Rešitev: Identiteta v a. pove, da je

$$0 = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\cdot t\right)\,,$$

ali

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\cdot t\,.$$

Iz tega izračunamo

$$t = \pi\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}\,.$$

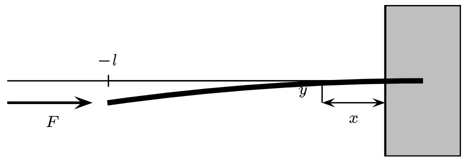
Ocenjevanje:

- *Kam bi del: 2 točki.*
- *Kam vstaviti $\theta = \pi$: 2 točki.*
- *Opaiti enačbi za t: 2 točki.*
- *Kako iz tega izračunati t: 2 točki*
- *Čas: 2 točki.*

5. (20) Prožna palica je trdno vpeta v zid kot na sliki 3. Na palico v vodoravni smeri proti zidu deluje sila F. Obliko palice za majhne odmike od ravnovesja opisuje diferencialna enačba

$$EIy'' = -\frac{wx^2}{2} - Fy\,,$$

kjer so E, I in w konstante.



Sl. 3 Vpeta palica, na katero deluje sila F

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Rešimo najprej homogeni del. Karakteristični polinom je oblike $EI\lambda^2 + F = 0$. *Označimo* $\delta = \sqrt{F/EI}$. *Rešitvi homogenega dela enačbe sta* $\cos\delta x$ *in* $\sin\delta x$. *Ker je na desni strani polinom druge stopnje, bo tudi partikularna rešitev polinom druge stopnje. Z nastavkom* $y_p = ax^2 + bx + c$ *dobimo enačbo*

$$2EIa = -\frac{wx^2}{2} - F(ax^2 + bx + c)\,.$$

Sledi $a = -w/2F$, $b = 0$ *in* $c = -2EIa/F = EIw/F^2$. *Splošna rešitev bo oblike*

$$y(x) = -\frac{w}{2F^2}(Fx^2 - 2EI) + c_1 \cos\delta x + c_2 \sin\delta x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Rešitvi homogene enačbe: 2 točki.*
- *Nastavek za nehomogeni del: 2 točki.*
- *Enačbe za koeficiente: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Palica je trdno vpeta v zid, tako da je $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$. Rešite enačbo pri teh začetnih pogojih.

Rešitev: Določiti moramo konstanti c_1 *in* c_2 *tako, da bo zadoščeno začetnim pogojem. Iz prvega začetnega pogoja sledi*

$$0 = c + c_1\,,$$

iz drugega pa

$$0 = b + c_2\delta\,.$$

Sledi

$$c_1 = -EIw/F^2 \qquad \text{in} \qquad c_2 = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kam deti začetne pogoje: 2 točki.*
- *Prva enačba, ki sledi iz začetnih pogojev: 2 točki.*
- *Druga enačba, ki sledi iz začetnih pogojev: 2 točki.*
- *Konstanti: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

6. (20) Naj bo $\mathbf{u}$ trikrat zvezno odvedljivo vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$ in naj bo $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ trikrat zvezno odvedljiva. Za poljubno dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definirajmo Laplaceov operator Δ s predpisom

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

Za vektorsko polje $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ definiramo $\Delta\mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$.

a. (10) Naj bo $f(x, y, z) = \mathrm{div}(\mathbf{u})$. Pokažite, da velja

$$\Delta f = \mathrm{div}(\Delta\mathbf{u})\,.$$

Rešitev: Začnimo z desno stranjo enačbe. Komponente polja $\Delta\mathbf{u}$ so Δu_1, Δu_2 in Δu_3. Po definiciji je potem

$$\mathrm{div}(\Delta\mathbf{u}) = \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial z}\,.$$

Izračunajmo prvi člen v vsoti na desni, torej

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\,.\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da vrstni red parcialnega odvajanja ni pomemben, ker so vse funkcije trikrat zvezno odvedljive. Podobno izračunamo še

$$\frac{\partial \Delta u_2}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)$$

in

$$\frac{\partial \Delta u_3}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\,.$$

Če seštejemo zgornje izraze, dobimo ravno

$$\Delta \mathrm{div}(\mathbf{u})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Definicija divergence: 2 točki.*
- *Zapis divergence $\mathbf{u}$: 2 točki.*
- *Zamenjava vrstnega reda parcialnega odvajanja: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Predpostavite, da je $\mathbf{w}$ dvakrat zvezno odvedljivo vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$ in velja zveza

$$\mathbf{u} + \mathbf{rot}(\mathbf{w}) = \nabla\phi + \Delta\mathbf{u}\,.$$

Predpostavite, da je $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$. Pokažite, da je $\Delta\phi = 0$.

Namig: Kaj je divergenca leve, kaj desne strani zgornje enačbe?

Rešitev: Najprej si oglejmo levo stran. Ker je divergenca rotorja vedno enaka 0*, je divergenca leve strani po predpostavki enaka* 0*. Oglejmo si še desno stran. Vemo, da je*

$$\mathrm{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi\,.$$

Z uporabo a. ugotovimo, da je

$$\mathrm{div}(\Delta\mathbf{u}) = \Delta\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0\,.$$

Izenačimo divergenco leve in desne strani in trditev sledi.

Ocenjevanje:

- *Divergenca rotorja: 2 točki.*
- *Linearnost divergence: 2 točki.*
- *Divergenca gradienta: 2 točki.*
- *Uporaba a.: 2 točki.*
- *Izenačitev leve in desne strani: 2 točki.*