FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

15. september 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Za poljubna dana $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ima enačba $z^3 + z + xy = 1$ natanko eno rešitev $z = g(x,y)$, tako da velja

$$g(x,y)^3 + g(x,y) + xy = 1\,.$$

a. (10) Pokažite, da je funkcija g v vsaki točki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ parcialno odvedljiva in pokažite, da je

$$g_x(x,y) = -\frac{y}{3g(x,y)^2+1} \qquad \text{in} \qquad g_y(x,y) = -\frac{x}{3g(x,y)^2+1}\,.$$

Rešitev: Označimo $f(x,y,z) = z^3 + z + xy - 1$. Vedno velja, da je $f_z(x,y,z) = 3z^2+1 > 0$. Če je za $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ točka $z = g(x,y)$ taka, da je $f(x,y,g(x,y)) = 0$, nam izrek o implicitni funkciji zagotavlja, da obstaja na neki okolici U točke (x,y) taka zvezno parcialno odvedljiva funkcija $g\colon U \to \mathbb{R}$, da velja

$$f(x,y,g(x,y)) = 0\,.$$

Ker pa je $g(x,y)$ natanko določena, sledi da je $g(x,y)$ kar enaka implicitni funkciji in zato zvezno parcialno odvedljiva.

Po formuli je

$$g_x(x,y) = -\frac{f_x(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))} \qquad \textit{in} \qquad g_y(x,y) = -\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))}\,.$$

Vstavimo in dobimo

$$g_x(x,y) = -\frac{y}{3g(x,y)^2+1} \qquad \textit{in} \qquad g_y(x,y) = -\frac{x}{3g(x,y)^2+1}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formulacija z implicitni funkcijo: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Sklep, da je funkcija parcialno odvedljiva: 2 točki.*
- *Formuli za parcialne odvode: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*

b. (10) Poiščite stacionarne točke funkcije g in ugotovite ali gre za lokalni maksimum ali lokalni minimum.

Rešitev: Očitna stacionarna točka je $(0,0)$. Označimo $z_0 = g(0,0)$. Potrebujemo odvode $g_{xx}(0,0)$, $g_{xy}(0,0)$ in $g_{yy}(0,0)$. Odvajamo identiteto $f(x,y,g(x,y)) = 0$ parcialno po x. Dobimo

$$3g^2 g_x + g_x + y = 0\,.$$

Odvajamo še enkrat po x in dobimo

$$6g g_x^2 + 3g^2 g_{xx} + g_{xx} = 0\,.$$

Sledi

$$g_{xx}(0,0) = 0\,.$$

Povsem podobno dobimo

$$g_{yy}(0,0) = 0\,.$$

Z odvajanjem po y sledi še

$$6gg_yg_x + 3g^2g_{xy} + g_{xy} + 1 = 0\,,$$

torej

$$g_{xy}(0,0) = -\frac{1}{3z_0^2+1}\,.$$

Sledi

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3z_0^2+1} \\ -\frac{1}{3z_0^2+1} & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Hessova matrika ni niti pozitivno niti negativno definitna. Na podlagi tega ne moremo sklepati, ali gre za lokalni maksimum ali lokalni minimum.

Za zabavo:

$$z_0 = -\left(\frac{2}{3\,\left(9+\sqrt{93}\right)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left(\frac{9+\sqrt{93}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Stacionarna točka: 2 točki.*
- *Ideja, da je potrebno izračunati Hessovo matriko: 2 točki.*
- *Formule za druge odvode: 2 točki.*
- *Dejanski drugi odvodi: 2 točki.*
- *Sklep o stacionarni točki: 2 točki.*

2. (20) Naj bo temperatura v točki (x, y, z) v prostoru $\mathbb{R}^3$ v trenutku $t = 0$ dana s funkcijo $T(x, y, z, 0)$. Temperatura v točki (a, b, c) v trenutku t je dana z integralom

$$T(a,b,c,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} T(x,y,z,0)\, e^{-\frac{1}{4t}((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Kot znano privzemite, da je za poljubna μ in $\sigma > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4\sigma^2}(u-\mu)^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{4\pi}\,\sigma\,.$$

a. (10) Naj bo začetna temperatura dana z

$$T(x,y,z,0) = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\, e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)}\,.$$

Izračunajte temperaturo v točki (a, b, c) v trenutku t.

Namig: Preverite, da je

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(x-a)^2}{4t} = \frac{\left(x - \frac{a}{1+t}\right)^2}{4\left(\frac{t}{1+t}\right)} + \frac{a^2}{4(1+t)}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} T(a,b,c,t) &= \\ &= \frac{1}{(16\pi^2 t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} T(x,y,z,0)\ e^{-\frac{1}{4t}((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{(16\pi^2 t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}-\frac{(x-a)^2}{4t}}\, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4}-\frac{(y-b)^2}{4t}}\, \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}-\frac{(z-c)^2}{4t}}\, \mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

Izračunati je potrebno še posamezne integrale. Prepišemo

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}-\frac{(x-a)^2}{4t}}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(x-\frac{a}{1+t}\right)^2}{4\left(\frac{t}{1+t}\right)}-\frac{a^2}{4(1+t)}}\, \mathrm{d}x \\ &= e^{-\frac{a^2}{4(1+t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(x-\frac{a}{1+t}\right)^2}{4\left(\frac{t}{1+t}\right)}}\, \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{4\pi}\sqrt{\frac{t}{1+t}}\, e^{-\frac{a^2}{4(1+t)}} \qquad \textit{Namig!} \end{aligned}$$

Sledi

$$T(a,b,c,t) = \frac{1}{(4\pi(1+t))^{3/2}}\, e^{-\frac{a^2+b^2+c^2}{4(1+t)}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje $T(x,y,z,0)$: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Upoštevanje namiga: 2 točki.*
- *Notranji integrali: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Predpostavite, da je v trenutku $t = 0$ temperatura konstantna in enaka T_0 na neskončnem valju z osjo enako osi z in polmerom R, sicer pa 0. Bolj matematično je

$$T(x,y,z,0) = \begin{cases} T_0\,, & \text{če je } x^2+y^2 \le R^2 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajte temperaturo $T(0,0,c,t)$.

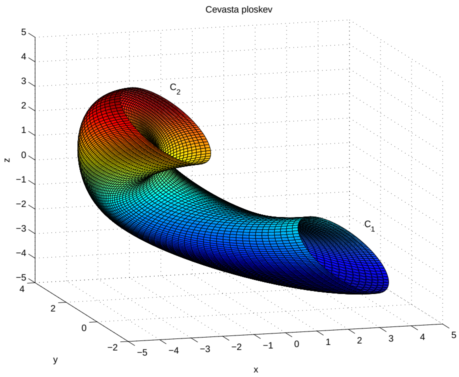
Rešitev: Računamo s pomočjo cilindričnih koordinat.

$$\begin{aligned} T(0,0,c,t) &= \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} T(x,y,z,0)\, e^{-\frac{1}{4t}(x^2+y^2+(z-c)^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ &= \frac{T_0}{(4\pi t)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R r e^{-\frac{r^2}{4t}}\, \mathrm{d}r \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-c)^2}{4t}}\, \mathrm{d}z \\ &= \frac{2\pi T_0}{(4\pi t)^{3/2}} \cdot 2t\left(1 - e^{-\frac{R^2}{4t}}\right) \cdot \sqrt{4\pi t} \\ &= T_0\bigl(1 - e^{-\frac{R^2}{4t}}\bigr)\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s cilindričnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Jacobijeva determinanta in meje: 2 točki.*
- *Prvi nortanji integral: 2 točki.*
- *Drugi notranji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo cevasta kot na sliki 1. Rob ploskve tvorita sklenjeni krivulji $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$. Privzemite, da sta krivulji orientirani "vzporedno", tako da ju "pretečemo" v isti smeri. V prostoru naj bo dano vektorsko polje $\mathbf{F}$. Označite $\xi = \mathbf{rot}(\mathbf{F})$. Predpostavite, da je polje ξ vedno vzporedno ploskvi $\mathcal{S}$, torej velja $\xi \cdot \mathbf{n} = 0$ v vsaki točki ploskve $\mathcal{S}$, kjer $\mathbf{n}$ označuje normalo na ploskev.



Sl. 1 Cevasta ploskev v prostoru.

a. (10) Utemeljite, da je

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Cev lahko "zapremo", tako da na krivulji $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ napnemo poljubni ploskvi. Tako dobimo zaključeno ploskev. Vemo, da je $\mathrm{div}(\xi) = 0$, *ker je divergenca rotorja vedno enaka* 0. *Po zaključni ploskvi je zato ploskovni integral rotorja enak* 0. *Poleg tega je ploskovni integral rotorja enak* 0 *tudi po ploskvi* $\mathcal{S}$, *saj je povsod vzporeden s ploskvijo. Sledi, da je del integrala po dodanih ploskvah enaka* 0, *pri čemer normalo na ploskev izberemo tako, da kaže iz telesa, ki ga omejuje zaključena ploskev. Če obrnemo eno od normal na dodanih ploskvah iz zgornjega sledi, da sta ploskovna integrala polja ξ s tako izbranimi normalami enaka.*

Po drugi strani pa nam Stokesov integral pove, da sta krivuljna integrala polja $\mathbf{F}$ *enaka ploskovnima integraloma polja ξ po dodanih ploskvah. Krivuljna integrala sta enaka.*

Ocenjevanje:

- *Zapiranje ploskve: 2 točki.*
- *Divergenca in Gauss: 2 točki.*
- *Integral po $\mathcal{S}$: 2 točki.*
- *Sklep o enakosti ploskvnih integralov: 2 točki.*
- *Stokes in končni sklep: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathcal{C}_3$ sklenjena krivulja, ki poteka po ploskvi $\mathcal{S}$ in natanko enkrat obkroži cev v enaki smeri kot krivulji $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$. Utemeljite, da je

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}\,.$$

Rešitev: Utemeljitev je podobna kot v a. Na krivulje napnemo ploskve in sledimo korakom v a.

Ocenjevanje:

- *Zapiranje ploskve: 2 točki.*
- *Divergenca in Gauss: 2 točki.*
- *Integral po $\mathcal{S}$: 2 točki.*
- *Sklep o enakosti ploskvnih integralov: 2 točki.*
- *Stokes in končni sklep: 2 točki.*

4. (20) Pri iskanju rotacijske ploskve z minimalno površino napete na vzporedna kroga se pojavi diferencialna enačba

$$\frac{y}{\sqrt{1+[y']^2}} = a$$

za neko konstanto $a > 0$.

a. (10) Pokažite, da je splošna rešitev oblike

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x+c}{a}\right)$$

za neko konstanto c.

Namig: Inverzna funkcija funkcije $\cosh x$ *na intervalu* $[1, \infty)$ *je funkcija*

$$\operatorname{arccosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Rešitev: Računamo

$$\frac{y^2}{a^2} = 1 + [y']^2\,,$$

torej

$$y' = \sqrt{y^2/a^2 - 1}\,.$$

Prepišemo v

$$\frac{y'}{\sqrt{y^2/a^2-1}} = 1\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\log\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}\right) = \frac{x+c}{a}\,.$$

za neko konstanto c. Z uporabo namiga sledi

$$\frac{y(x)}{a} = \cosh\left(\frac{x+c}{a}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izražanje* y'*: 2 točki.*
- *Opažanje, da je enačba z ločljivima spremenljivkama: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevanje namiga: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev zgornje diferencialne enačbe na intervalu $[-b, b]$, ki ustreza pogoju $y(-b) = y(b) = \alpha$ in velja

$$\frac{\cosh(b/a)}{(b/a)} = \frac{\alpha}{b}\,.$$

Rešitev: Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x+c}{a}\right)\,.$$

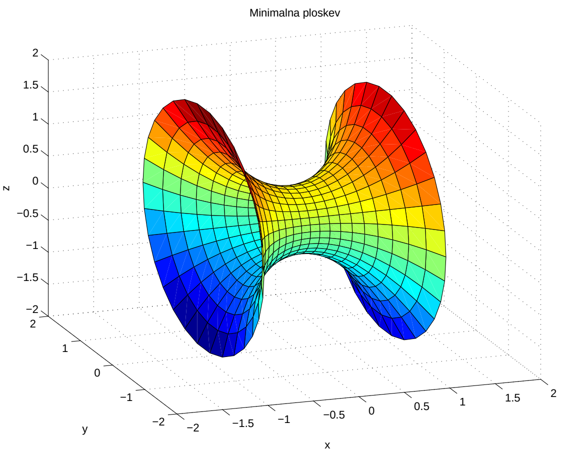
Določiti moramo še primernu konstanto c. Vstavimo

$$\alpha = y(b) = a\cosh\left(\frac{x+c}{a}\right)\,.$$

Prepišemo v

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{\cosh\left(\frac{b+c}{a}\right)}{(b/a)}\,.$$

Če izberemo $c = 0$, je enačbi ustreženo. Zaradi sodosti funkcije $\cosh x$ *je tudi $y(-b) = \alpha$. Primer minimalne ploskve za $a = b = 1$ in $\alpha = 2$ je na spodnji sliki.*



Ploskev z minimalno površino napeta na dva kroga.

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Prepis: 2 točki.*
- *Upoštevanje pogoja: 2 točki.*
- *$c = 0$: 2 točki.*
- *Še drugi pogoj: 2 točki.*

5. (20) Dan naj bo sistem linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}\,.$$

a. (10) Poiščite tri linearno neodvisne rešitve zgornjega sistema.

Rešitev: Karakteristični polonim dobimo kot

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda - 4 = 0\,.$$

Rešitve so $\lambda_1 = -2$ *in* $\lambda_2 = 1+i$ *in* $\lambda_3 = 1-i$. *Lastni vektor, ki pripada* λ_1 *je* $\mathbf{x} = (1,-1,1)$, *lastni vektor, ki pripada* λ_2 *pa* $\mathbf{x}_2 = (2-2i, 2, 1+i)$. *Prva rešitev je enaka*

$$\mathbf{y}_1 = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

ostali dve linearno neodvisni rešitvi pa sta realni in imaginarni del produkta

$$e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}\,.$$

Dobimo

$$\mathbf{y}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 2\cos t + 2\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \quad \textit{in} \quad \mathbf{y}_3 = e^t \begin{pmatrix} -2\cos t + 2\sin t \\ 2\sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Lastne vrednosti: 2 točki.*
- *Lastni vektorji: 2 točki.*
- *Prva rešitev: 2 točki.*
- *Ostali dve rešitvi: 2 točki.*

b. (10) Rešite še nehomogeno enačbo

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} + e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Začetni pogoj naj bo $\mathbf{y}(0) = (0,0,0)$.

Namig: Poskusite z nastavkom $\mathbf{y}_p = e^{-t}\mathbf{x}$ *za neznan vektor* $\mathbf{x}$.

Rešitev: Najprej potrebujemo partikularno rešitev. Poskusimo z nastavkom iz namiga. Z vstavljanjem dobimo

$$-e^{-t}\,\mathbf{x} = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + e^{-t}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pokrajšamo e^{-t} *in dobimo enačbo*

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev je $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$. *Splošna rešitev bo oblike*

$$\mathbf{y} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3\,.$$

Iz začetnega pogoja sledi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dobimo sistem enačb

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

z rešitvijo $c_1 = -1/5$, $c_2 = -3/5$ *in* $c_3 = -1/5$.

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje nastavka: 2 točki.*
- $\mathbf{x}$ *in partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

6. (20) Pri hitrem vrtenju dolge in ozke grede nastopi diferencialna enačba

$$EIy^{(4)} - \frac{p\omega^2}{g}y = 0\,,$$

kjer je

- E-elastični modul.
- I-vztrajnostni moment preseka.
- p-specifična teža po enoti dolžine.
- ω-kotna hitrost.
- g-zemeljski pospešek.
- l-dolžina gredi.

Funkcija y opisuje odmik od ravnovesne lege.

a. (10) Napišite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Karakteristična enačba za to linearno diferencialno enačbo je $P(\lambda) = EI\lambda^4 - \frac{p\omega^2}{g} = 0$. *Če označimo* $\nu = (p\omega^2/EIg)^{1/4}$, *so koreni karakterističnega polinoma* ν, $-\nu$, $i\nu$ *in* $-i\nu$. *Splošna rešitev je torej oblike*

$$c_1 e^{\nu x} + c_2 e^{-\nu x} + c_3 \cos(\nu x) + c_4 \sin(\nu x)$$

za poljubne konstante c_1, c_2, c_3 *in* c_4.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Rešitvi iz realnih ničel: 2 točki.*
- *Rešitvi iz imaginarnih ničel: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{p}}\,.$$

Poiščite rešitev diferencialne enačbe na intervalu $[0, l]$, ki ustreza robnim pogojem $y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0$ in **ni** identično enaka 0.

Rešitev: Konstante iz splošne rešitve moramo določiti iz danih zahtev. Prvi dve zahtevi dasta enačbi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ \nu^2(c_1 + c_2 - c_3) &= 0 \end{aligned}$$

Iz tega sledi $c_3 = 0$ *in* $c_1 + c_2 = 0$. *Iz ostalih dveh pogojev dobimo*

$$\begin{aligned} c_1 e^{\nu l} - c_1 e^{-\nu l} + c_4 \sin(\nu l) &= 0 \\ \nu^2 (c_1 e^{\nu l} - c_1 e^{-\nu l} - c_4 \sin(\nu l)) &= 0 \end{aligned}$$

Enačbi odštejemo in ugotovimo, da mora biti $c_4 \sin(\nu l) = 0$ *in* $c_1 = 0$. *Z danim* ω *je* $\nu = \pi/l$, *torej* $\sin(\nu l) = 0$ *in lahko izberemo* $c_4 \neq 0$, *sicer pa poljuben. S tem smo tudi našli rešitev, ki ni identično enaka 0.*

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Prvi dve enačbi: 2 točki.*
- *Drugi dve enačbi: 2 točki.*
- *Konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*