FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

Pisni izpit

1. september 2003

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Zaporedna številka izpita: __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge je 6 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 120 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bosta $a > 0$ in $b > 0$ števili, za kateri velja $ab = 1$. Na območju $G = \{(x, y, z)\colon x > 0, z > 0, xz - y^2 > 0\}$ naj bo definirana funkcija

$$f(x, y, z) = \frac{\alpha}{2} \log(xz - y^2) - \frac{1}{2}(ax + bz)\,,$$

kjer je $\alpha > 0$ dano število.

a. (10) Pokažite, da je točka $(\alpha b, 0, \alpha a)$ lokalni maksimum funkcije $f(x, y, z)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\alpha z}{2(xz-y^2)} - \frac{a}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -\frac{\alpha y}{(xz-y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\alpha x}{2(xz-y^2)} - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Z vstavljanjem točke $(\alpha b, 0, \alpha a)$ ugotovimo, da so vsi parcialni odvodi enaki 0. Dana točka je stacionarna. Potrebujemo še Hessejevo matriko v točki $(\alpha b, 0, \alpha a)$. Računamo, recimo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= -\frac{\alpha z^2}{2(xz-y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z) &= -\frac{\alpha y z}{(xz-y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z) &= -\frac{\alpha y^2}{2(xz-y^2)^2} \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $ab = 1$ in dobimo

$$Hf(\alpha b, 0, \alpha a) = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b^2}{2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Diagonalni elementi Hessove matrike v točki $(\alpha b, 0, \alpha a)$ so negativni, zato je matrika negativno definitna. Stacionarna točka je lokalni maksimum.

Ocenjevanje:

- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje točke: 2 točki.*
- *Drugi parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Sklep o lokalnem maksimumu: 2 točki.*

b. (10) Naj bo funkcija $g\colon G \to \mathbb{R}$ dana z

$$g(x, y, z) = xz - y^2 - 1\,.$$

Poščite stacionarne točke funkcije $f(x, y, z)$ na območju G pri pogoju $g(x, y, z) = 0$.

Rešitev: Najprej opazimo, da lahko namesto s funkcijo $f(x, y, z)$ računamo kar s funkcijo

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2}(ax + bz)\,,$$

Po Lagrangu sestavimo funkcijo $F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) &= -\tfrac{a}{2} - \lambda z \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= 2y\lambda \\
\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= -\tfrac{b}{2} - \lambda x
\end{aligned}$$

Parcialne odvode izenačimo z 0. *Iz prve ali tretje enačbe razberemo, da mora biti* $\lambda \neq 0$. *Druga enačba potem pove, da je* $y = 0$. *Iz pogoja* $g(x,y,z) = 0$ *potem sledi, da je* $xz = 1$. *Z nekaj računanja dobimo* $x = b$ *in* $z = a$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da lahko prvi člen zanemarimo: 2 točki.*
- *Lagrangova funkcija: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Enačbe za točko: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo H telo, ki ga dobimo kot presek krogle s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišču in pokončnim valjem s polmerom $\rho = 1/2$, središčem osnovne ploskve v točki $(1/2, 0, 0)$ in osjo vzporedno osi z. Valj naj ima višino $h = 1$.

a. (10) Izračunajte prostornino opisanega telesa.

Namig: Prostornina je integral funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *po ustrezno izbranem področju.*

Rešitev: Računamo integral funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *na območju* $G = \{(x, y)\colon (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\}$*. Uvedemo polarne koordinate in dobimo*

$$\begin{aligned} V &= \int_G \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{dy} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} \sqrt{1 - r^2}\, r\, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\, \left[1 - (1 - \cos^2\phi)^{3/2}\right] \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin(\phi)^3\, \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate in Jacobijeva determinanta: 2 točki.*
- *Nove meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

b. (10) Površino dela krogle, ki ga "izreže" valj izračunamo z integralom

$$\int_G \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,,$$

kjer je $G = \{(x, y)\colon (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\}$. Izračunajte ta integral.

Rešitev: Podobno kot prej uvedemo polarne koordinate. Računamo

$$\begin{aligned} P &= \int_G \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}\, r\, \mathrm{d}r \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\, (1 - \sqrt{1 - \cos^2\phi}) \\ &= \pi - 2\,. \end{aligned}$$

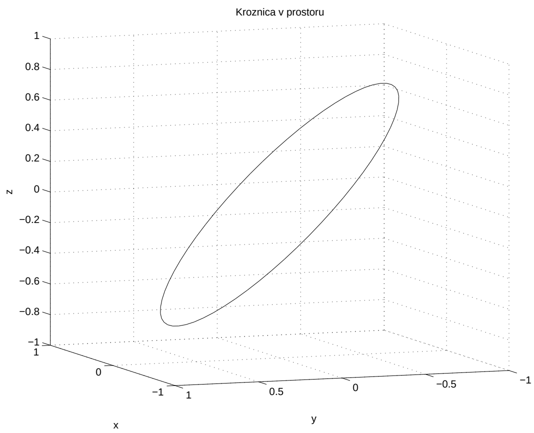
Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate in Jacobian: 2 točki.*
- *Nove meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

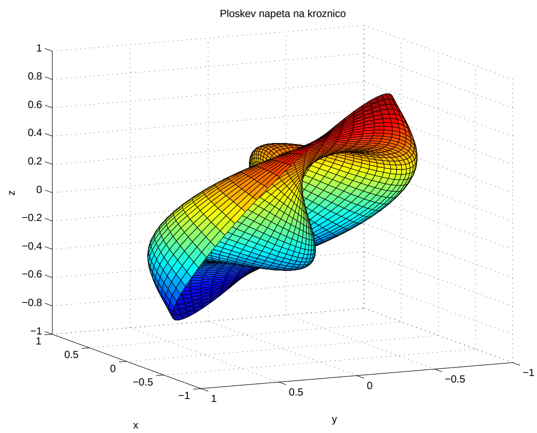
3. (20) Na krožnico polmera R v prostoru napnemo poljubno ploskev kot na sliki 2b. Tlak na izbrano stran ploskve deluje z neko silo. Privzamemo, da je tlačna sila vedno pravokotna na ploskev, torej nasprotna normali $\mathbf{n}$ na ploskev. Projekcijo sile na enotski vektor $\mathbf{e}$ izračunamo kot ploskovni integral

$$-\int_{\mathcal{S}} p(x,y,z)\,\mathbf{e}\,d\mathbf{S}\,,$$

kjer je $p(x,y,z)$ tlak v točki (x,y,z).



Slika 2a Krožnica v prostoru.



Slika 2b Ploskev napeta na krožnico.

a. (10) Predpostavite, da je tlak konstanten in enak p. Pokažite, da ima sila na ploskev na stran, ki si jo izberemo z normalo $\mathbf{n}$, samo komponento v smeri normale $\mathbf{n}$ na krog napet na krožnico. Izračunajte velikost te sile.

Rešitev: Mislimo si, da na obroč prilepimo ravno ploskev in tako dano ploskev $\mathcal{S}$ *"zapremo". Pri izbranem* $\mathbf{e}$ *integriramo konstantno vektorsko polje* $\mathbf{F} = p\mathbf{e}$ *po zaključeni ploskvi. Ker je divergenca konstantnega polja enaka* 0*, lahko po Gaussovem izreku sklepamo, da je sila na ploskev enaka sili na krog, ki smo ga "prilepili", pri čemer izbiramo normale vedno tako, da inducirajo enako orientacijo na krožnici. To silo pa dobimo po dobrem starem pravilu, da je* $F = pS$*, kjer je* S *ploščina kroga. Sila je torej* $-\mathbf{n}p \cdot \pi R^2$*, kjer je* $\mathbf{n}$ *normala na krog napet na krožnico. S tem razmislekom je tudi potrjeno, da ima iskana sila le komponento v smeri vektorja* $\mathbf{n}$ [1]*.*

Ocenjevanje:

- *Lepljenje kroga: 2 točki.*
- *Divergenca: 2 točki.*
- *Gaussov izrek: 2 točki.*
- *Sklep o enakosti integralov: 2 točki.*
- *Sklep o smeri sile: 2 točki.*

[1] Izračun je med drugim potrditev, da je pri slovitih Magdeburških polkroglah vseeno, kakšne oblike so. Sila je nazadnje odvisna le od površine ravne ploskve napete na stični obroč obeh Magdeburških polkrogel.

b. (10) Predpostavite, da tlak pada z višino kot $p(x, y, z) = p_0 - \alpha z$. Predpostavite, da leži krožnica v ravnini vzporedni z xy-ravnino na višini $z = h > 0$, ploskev pa je dana kot graf funkcije $f(x, y)$ nad območjem K. Izrazite silo tlaka na ploskev na stran, kjer ima normala pozitivno komponento v smeri osi z, z uporabo količine $V = \int_K f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \pi R^2 h$.

Namig: Gauss.

Rešitev: Poglejmo, koliko se razlikujeta sila na dano ploskev in sila na krog, ki ga lahko v mislih napnemo na krožnico. Integriramo polje $\mathbf{F} = (p_0 - \alpha z)\,\mathbf{e}$, katerega divergenca je enaka $-\alpha e_3$. Na krožnico napnimo krog, tako da dobimo zaključeno ploskev. Po Gaussovem izreku je je razlika med projekcijama enaka $-\alpha e_3 V$, kjer je V prostornina telesa, ki ga omejujeta grafa $f(x, y)$ in krog, napet na dano krožnico (V je lahko tudi 0, Gaussov izrek še vedno velja!). Iz tega razberemo, da bo edina razlika med silama na krog in dano ploskev v smeri osi z. Sila na krog je enaka $(0, 0, -\pi R^2(p_0 - \alpha h))$. Razlika med to silo in silo na ploskev bo $-\alpha e_3$, torej bo iskana sila enaka [2]

$$(0, 0, -\pi R^2(p_0 - \alpha h) - \alpha V)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja zapreti plosekv: 2 točki.*
- *Konstantna divergenca in Gauss: 2 točki.*
- *Opažanje, da je razlika le v smeri osi z: 2 točki.*
- *Izračun sile na krog: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

[2] Pozoren bralec bo v izračunu spoznal Arhimedov zakon vzgona.

4. (20) Funkcija $u\colon G \to \mathbb{R}$ naj bo zvezno parcialno odvedljiva na $G = \{(x,y)\colon y \geq 0\}$ in naj zadošča parcialni diferencialni enačbi

$$au_x + bu_y + c(x,y)u = h(x,y)$$

za dani zvezni funkciji $c(x,y)$ in $h(x,y)$ na G. Za konstanti a in b velja $a > 0$ in $b > 0$.

a. (10) Za fiksen x' definirajte funkcijo $\phi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\phi(t) = u(x' + at, bt)\,.$$

Pokažite, da funkcija $\phi(t)$ ustreza diferencialni enačbi

$$\dot{\phi} + c(x' + at, bt)\phi = h(x' + at, bt)$$

z začetnim pogojem $\phi(0) = u(x', 0)$.

Rešitev: Računamo

$$\dot{\phi}(t) = au_x'(x' + at, bt) + bu_y(x' + at, bt)\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned} &\dot{\phi}(t) + c(x' + at, bt)\phi(t) = \\ &\quad = \; au_x'(x' + at, bt) + bu_y(x' + at, bt) + c(x' + at, bt)u(x' + at, bt) \\ &\quad = \; h(x' + at, bt)\,. \end{aligned}$$

Za začetni pogoj vstavimo samo $t = 0$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z odvajanjem: 2 točki.*
- *Odvod ϕ: 2 točki.*
- *Vstavljanje v enačbo: 2 točki.*
- *Preureditev in skep: 2 točki.*
- *Začetni pogoj: 2 točki.*

b. (10) Naj velja $u(x,0) = x$, $c(x,y) = c$ in $h(x,y) = e^{-y}$. Predpostavite, da je $b \neq c$. Pokažite, da velja

$$u(x,y) = \frac{e^{-y}}{c-b} + \left(x - \frac{ay}{b} - \frac{1}{c-b}\right) e^{-cy/b}\,.$$

Namig: $u(x,y) = u(x - ay/b, 0) + \phi(y/b)$, pri čemer je ϕ funkcija iz a. z $x' = x - ay/b$.

Rešitev: Za dan x dobimo za ϕ enačbo

$$\dot{\phi} + c\phi = e^{-bt}\,.$$

Gre za nehomogeno linearno diferencialno enačbo prvega reda. Homogena rešitev je $\phi_h(t) = e^{-ct}$. *Partikularno rešitev iščemo z nastavkom* Ae^{-bt}. *Odvajamo in vstavimo in dobimo*

$$-Abe^{-bt} + cAe^{-bt} = e^{-bt}\,.$$

Sledi $A = 1/(c-b)$. *Splošna rešitev je*

$$\phi(t) = e^{-bt}/(c-b) + \gamma e^{-ct}\,.$$

Začetni pogoj je $\phi(0) = x$. *Sledi*

$$\phi(t) = \frac{e^{-bt}}{c-b} + \left(x - \frac{1}{c-b}\right) e^{-ct}\,.$$

Če želimo $u(x,y)$, *si izberimo* $t = y/b$ *in* $x = x - ay/b$. *Potem je* $u(x,y) = \phi(t)$. *Sledi*

$$u(x,y) = \frac{e^{-y}}{c-b} + \left(x - \frac{ay}{b} - \frac{1}{c-b}\right) e^{-cy/b}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Homogena rešitev: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Ideja, kako izračunati* $u(x,y)$*: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

5. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}\cos x\,.$$

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Najprej poiščemo linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe. Karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

z ničlama $\lambda_1 = 2 + i$ in $\lambda_2 = 2 - i$. Linearno neodvisni rešitvi sta

$$y_1(x) = e^{2x}\cos x \qquad in \qquad y_2(x) = e^{2x}\sin x\,.$$

Partikularno enačbo rešujemo tako, da izraz na desni nadomestimo najprej z $4e^{(2+i)x}$. Ker je konstanta v eksponentu ničla karakterističnega polinoma, bomo rešitve iskali z nastavkom

$$y_p(x) = Axe^{(2+i)x}\,.$$

Potrebujemo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^{(2+i)x}(1 + x(2+i)) \\ y_p''(x) &= Ae^{(2+i)x}(2(2+i) + x(2+i)^2)\,. \end{aligned}$$

Vstavimo in pokrajšamo $e^{(2+i)x}$. Dobimo

$$A\left((2(2+i) + x(2+i)^2) - 4(1 + x(2+i)) + 5x\right) = 2$$

Preračunamo in dobimo

$$A \cdot 2i = 2\,,$$

torej $A = -i$. Iskana rešitev je realni del $Axe^{(2+i)x}$, kar je $y_p(x) = xe^{2x}\sin x$. Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = xe^{2x}\sin x + c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničle: 2 točki.*
- *Linearno neodvisni rešitvi: 2 točki.*
- *Nastavek za partikularno rešitev: 2 točki.*
- *Konstanta A: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$.

Rešitev: Iz začetnih pogojev moramo določiti konstanti c_1 in c_2 v splošni rešitvi. Dobimo

$$y(0) = c_1 \qquad in \qquad y'(0) = 2c_1 + c_2\,.$$

Rešitev sistema je $c_1 = 0$ in $c_2 = 2$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 3 točke.*
- *Sistem enačb za konstanti: 3 točke.*
- *Rešitev sistema enačb: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

6. (20) Naj bo dana homogena linearna diferencialna enačba drugega reda z

$$p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0\,,$$

kjer so $p(x)$, $q(x)$ in $r(x)$ dane funkcije na intervalu (a,b) in velja $p(x) > 0$ za $x \in (a,b)$.

a. (10) Naj bo u rešitev enačbe. Linearno neodvisno rešitev v iščemo z nastavkom $v = uw$, kjer je w neznana funkcija. Pokažite, da mora w na (a,b) ustrezati enačbi

$$u(x)p(x)w'' + \big(2p(x)u'(x) + q(x)u(x)\big)\, w' = 0\,.$$

Rešitev: Računamo

$$v' = u'w + uw' \quad \textit{in} \quad v'' = u''w + 2u'w' + uw''\,.$$

Vstavimo in dobimo enačbo

$$p(x)\big(u''w + 2u'w' + uw''\big) + q(x)\big(u'w + uw'\big) + r(x)uw = 0\,.$$

Preuredimo

$$w\big(p(x)\, u'' + q(x)\, u' + r(x)\, u\big) + w'\big(2p(x) + q(x)\big) + p(x)w'' = 0\,.$$

Upoštevamo, da je u rešitev in dobimo iskano enačbo.

Ocenjevanje:

- *Prvi odvod v: 2 točki.*
- *Drugi odvod v: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Upoštevanje, da je u rešitev: 2 točki.*
- *Končna enačba: 2 točki.*

b. (10) Na intervalu $(-1,1)$ je dana Legendrova diferencialna enačba

$$(1-x^2)\, y'' - 2x\, y' + 2y = 0\,.$$

Preverite, da je $u(x) = x$ rešitev in poiščite linearno neodvisno rešitev. Preverite, da sta u in v res linearno neodvisni.

Rešitev: Uporabimo a. del naloge. Funkcija w mora ustrezati enačbi

$$x(1-x^2)\, w'' + (2(1-x^2) - 2x^2)\, w' = 0\,.$$

Označimo $z = w'$. Enačba preide v

$$x(1-x^2)\, z' + (2(1-x^2) - 2x^2)\, z = 0\,.$$

Prepišemo v

$$z' + \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)}\, z = 0\,.$$

To je homogena linearna diferencialna enačba prvega reda. Vemo, da je

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\begin{aligned}
\log z &= -\int \frac{2(1-2x^2)}{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{2(1-x^2)-2x^2}{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{2\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\log x - \log(1-x^2) \\
&= -\log\bigl(x^2(1-x^2)\bigr)\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$z(x) = \frac{1}{x^2(1-x^2)}\,.$$

Integriramo še enkrat, da dobimo $w(x)$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{x} + \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,.
\end{aligned}$$

Rešitev $v = uw$ dobimo kot

$$v(x) = \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1\,.$$

Za preverjanje linearne neodvisnosti u in v izračunamo determinanto Wronskega. S preprostim računom dobimo

$$W = uv' - u'v = -\frac{1}{1-x^2}\,.$$

Za $x \in (-1,1)$ je ta determinanta različna od 0, torej sta rešitvi linearno neodvisni.

Ocenjevanje:

- *Enačba za w 2 točki.*
- *Opažanje, da gre za homogeno linearno enačbo prvega reda: 2 točki.*
- *Nastavek za reševanje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Potrditev linearne neodvisnosti.*