FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

1. kolokvij

2. april 2008

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkcija f naj bo dana s predpisom

$$f(x) = \frac{x}{(9+x^2)^2}$$

a. (15) Navedite ali izračunajte:

1. Definicijsko območje.
2. Intervale naraščanja ali padanja.
3. Maksimum in minimum funkcije.
4. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$.
5. Intervale konveksnosti ali konkavnosti funkcije.

Rešitev:

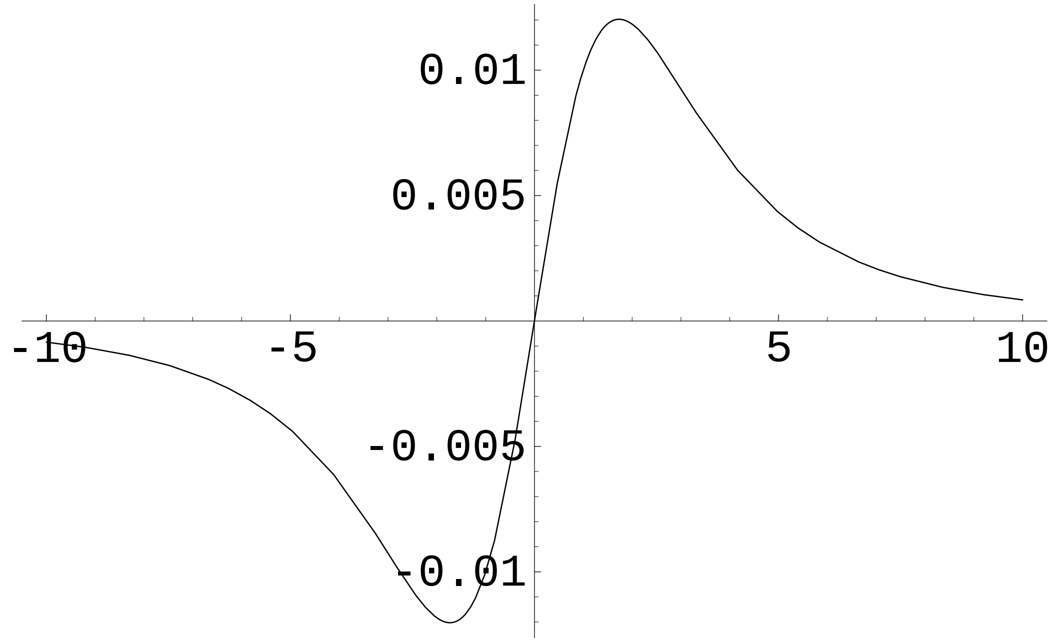
1. *Definicijsko območje je cela realna os.*
2. *Odvajamo in dobimo*
$$f'(x) = \frac{9-3\,x^2}{(9+x^2)^3}\,.$$
Na intervalu $(-\infty,-\sqrt{3})$ *je funkcija padajoča. Na* $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ *je funkcija naraščajoča, na intervalu* $(\sqrt{3},\infty)$ *pa je funkcija spet padajoča.*
3. *Maksimum je točka* $x=\sqrt{3}$*, minimum pa točka* $-\sqrt{3}$.
4. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.
5. *Izračunamo*
$$f''(x) = \frac{12\,x\,(-9+x^2)}{(9+x^2)^4}\,.$$
Na intervalih $(-3,0)$ *in* $(3,\infty)$ *je* $f''(x) > 0$*, torej je tam funkcija konveksna, sicer pa je konkavna.*

Ocenjevanje:

- *Definicijsko območje: 3 točke.*
- *Intervale naraščanja ali padanja: 3 točke.*
- *Ekstremi: 3 točke.*
- *Obe limiti: 3 točke.*
- *Intervali konveksnosti, konkavnosti: 3 točke.*

b. (10) Skicirajte graf funkcije f.

Rešitev:



Ocenjevanje:

- *Pravo padanje in naraščanje: 2 točki.*
- *Prava konveksnost ali konkavnost: 2 točki.*
- *Prava ničla: 2 točki.*
- *Prava asimptota: 2 točki.*
- *Pravi naklon v* 0*: 2 točki.*

2. (25) Naj bo $G(x)$ funkcija, za katero velja

$$G'(x) = e^{-x^2/2}$$

in $G(x) > 0$ za vse x.

a. (10) Naj bo

$$F(x) = e^{-x^2} + 2xe^{-x^2/2}G(x)\,.$$

Pokažite, da je

$$F'(x) = 2e^{-x^2/2}G(x)(1-x^2)\,.$$

Rešitev: Odvajamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(e^{-x^2} + 2xe^{-x^2/2}G(x)\right)' \\ &= -2xe^{-x^2} + 2e^{-x^2/2}G(x) - 2x^2e^{-x^2/2}G(x) + 2xe^{-x^2/2}e^{-x^2/2} \\ &= 2e^{-x^2/2}G(x)(1-x^2)\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje prvega člena: 2 točki.*
- *Odvajanje produkta: 2 točki.*
- *Odvajanje prvih dveh členov v produktu: 2 točki.*
- *Odvajanje tretjega člena: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

b. (15) Poiščite lokalne ekstreme funkcije

$$F(x) = e^{-x^2} + 2xe^{-x^2/2}G(x)$$

in ugotovite, ali so lokalni minimumi ali lokalni maksimumi.

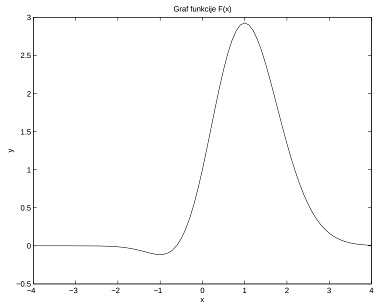
Rešitev: Iz a. vemo, da je $F'(x) = 2e^{-x^2/2}G(x)(1-x^2)$. *Ker je* $G(x) > 0$, *sta stacionarni točki enaki* $x = 1$ *in* $x = -1$. *Potrebujemo še druga odvoda v točkah* $x = 1$ *in* $x = -1$. *Računamo*

$$F''(x) = -2xe^{-x^2/2}G(x)(1-x^2) + 2e^{-x^2/2}G'(x)(1-x^2) - 4xe^{-x^2/2}G(x)\,.$$

Dobimo

$$F''(-1) = 4e^{-1/2}G(-1) \qquad \text{in} \qquad F''(1) = -4e^{-1/2}G(1)\,.$$

Ker je $G(x) > 0$, *je* $x = -1$ *lokalni minimum in* $x = 1$ *lokalni maksimum. Graf funkcije je na spodnji sliki*



Slika 1 Graf funkcije F(x)

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je treba 2. odvod: 3 točke.*
- *Izračun drugega odvoda: 3 točke.*
- *Vstavljanje $x = -1$: 3 točke.*
- *Vstavljanje $x = 1$: 3 točke.*
- *Sklepi: 3 točke.*

3. (25) Eulerjeva števila E_{2k} [1] so definirana kot

$$T_{2n}(x) = E_0 - \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$

kjer je $T_{2n}(x)$ Taylorjev polinom $2n$-te stopnje za funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

za $|x| < \pi/2$ v točki $x_0 = 0$.

a. (15) Pokažite, da za vsak $n > 0$ velja

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} f^{(2k)}(0)(-1)^{n-k} = 0\,.$$

Namig: Odvajajte identiteto $f(x) \cdot \cos x = 1$ *po Leibnizu.*

Rešitev: Zmnožimo in dobimo $f(x)\cos x = 1$*. Odvajamo to enakost* $2n$*-krat po* x *z uporabo Leibnizovega pravila. Dobimo*

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} f^{(i)}(x) \cos^{(2n-i)} x = 0\,.$$

Vstavimo $x = 0$*. Vsi lihi odvodi* $\cos x$ *so* $\pm \sin x$*, zato so v* $x = 0$ *enaki* 0*. Sledi*

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} f^{(i)}(0) \cos^{(2n-i)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} f^{(2k)}(0) \cos^{(2n-2k)}(0)$$

Upoštevamo še, da je $\cos^{(2n-2k)}(0) = (-1)^{n-k}$ *in dobimo*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} f^{(2k)}(0)(-1)^{n-k} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izvršen Leibniz: 3 točke.*
- *Odvodi kosinusa: 3 točke.*
- *Vsi lihi členi 0: 3 točke.*
- *Odvodi kosinusa v točki 0: 3 točke.*
- *Končno preurejanje: 3 točke.*

[1] Leonhard Euler, 1707-1783, švicarski matematik

b. (10) Z uporabo točke a. pokažite, da velja

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0$$

in izračunajte $f^{(4)}(0)$.

Rešitev: Po definiciji koeficientov v Taylorjevem polinomu je

$$\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!} .$$

Vstavimo to v enakost iz točke a. in dobimo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k E_{2k} (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} E_{2k} ,$$

kar pa je že želena enakost. Izračunajmo še $f^{(4)}(0)$. Očitno je $E_0 = f(0) = 1$. Iz zgornje formule sledi za $n = 1$,

$$E_0 + E_2 = 0 ,$$

torej $E_2 = -1$. Za $n = 2$ dobimo

$$E_0 + 6E_2 + E_4 = 0$$

torej $E_4 = 5$. Sledi $f^{(4)}(0) = E_4 = 5$.

Ocenjevanje:

- *Povezava E_{2k} in $f^{(2k)}(0)$: 2 točki.*
- *Vstavljanje E_{2k} v rekurzivno formulo: 2 točki.*
- *Potence -1: 2 točki.*
- *E_0 in E_2: 2 točki.*
- *$E_4 iniskaniodvod$: 2 točki.*

4. (25) Integriranje per partes:

a. (15) Označite

$$I_n = \int_0^1 x \log^n x \,\mathrm{d}x\,.$$

Pokažite, da je

$$I_n = -\frac{n}{2}\, I_{n-1}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x \log^n x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \log^n x\Big|_0^1 - \frac{n}{2} \int_0^1 x^2 \log^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{n}{2} \int_0^1 x \log^{n-1} x \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{n}{2}\, I_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izbira G: 3 točke.*
- *Izbira f: 3 točke.*
- *Integriranje f: 3 točke.*
- *Limita na spodnji meji (n-krat l'Hospital): 3 točke.*
- *Končna rekurzija: 3 točke.*

b. (10) Pokažite, da je

$$I_n = \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}}\,.$$

Rešitev: Uporabimo rezultat iz a. Računamo

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{n}{2}\, I_{n-1} \\ &= \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot I_{n-2} \\ &= \cdots\cdots\cdot \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= (-1)^n \frac{n!}{2^n} \int_0^1 x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z a.: 2 točki.*
- *Prvi korak rekurzije: 2 točki.*
- *Predznaki: 2 točki.*
- *Zadnji korak rekurzije: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*