FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

1. kolokvij

2. april 2008

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkcija f naj bo dana s predpisom

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x} - 1)\,.$$

a. (15) Navedite ali izračunajte:

- Definicijsko območje.
- Asimptote.
- Intervale naraščanja ali padanja.
- $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ in $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)$.
- $\lim_{x\uparrow 0} f(x)$in $\lim_{x\uparrow 0} f'(x)$.
- Točke prevoja.

Rešitev:

- *Definicijsko območje je razen točke $x = 0$ cela realna os.*
- *Asimptota je premica $y = -\pi/4$.*
- *Odvajamo in dobimo*

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + (-1 + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{1}{x^2}\,.$$

  Odvod je v vseh točkah definicijskega območja negativen, torej je funkcija na $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$ padajoča.
- $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \pi/2$.
- $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = -1$.
- $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\pi/2$.
- $\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = -1$.
- *Drugi odvod je*

$$f''(x) = \frac{4x - 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2}\,.$$

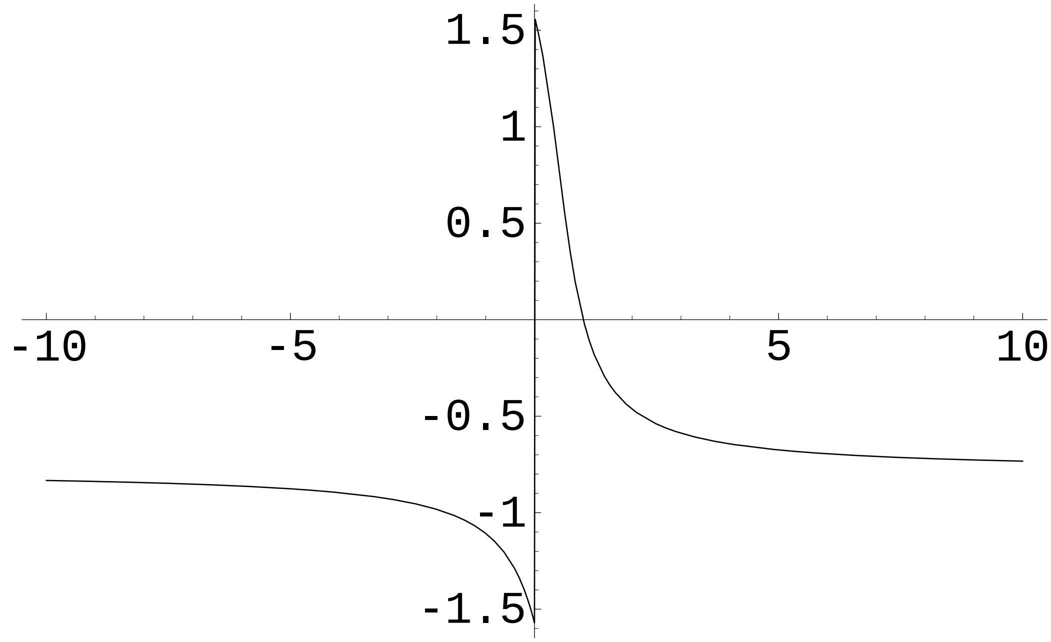
  Prevoj je torej v točki $x = 1/2$.

Ocenjevanje:

- *Definicijsko območje: 3 točki.*
- *Asimptote: 3 točki.*
- *Intervale naraščanja ali padanja: 3 točki.*
- *Prvi dve limiti: 2 točki.*
- *Drugi dve limiti: 2 točki.*
- *Točke prevoja: 2 točki.*

b. (10) Skicirajte graf funkcije f.

Rešitev:



Ocenjevanje:

- *Pravo padanje in naraščanje: 2 točki.*
- *Prava nezveznost: 2 točki.*
- *Prava asimptota: 2 točki.*
- *Prava ničla: 2 točki.*
- *Prav konkavnost, konveksnost: 2 točki.*

2. (25) Iz kartona sestavimo škatlo v obliki prizme s kvadratastim dnom brez pokrova. Volumen škatle naj bo fiksen in enak V. Označite stranico osnovne ploskve z x.

a. (10) Izrazite površino škatle z x in V.

Rešitev: Označimo višino prizme s h. Ker je volumen fiksen, mora veljati

$$V = x^2 h\,, \qquad \textit{torej} \qquad h = \frac{V}{x^2}\,.$$

Površina škatle je vsota površine osnovne ploskve in štirih stranskih ploskev v obliki pravokotnika s stranicama x in h. Sledi

$$P = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{4V}{x}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izraz za volumen: 2 točki.*
- *Izražanje h z x: 2 točki.*
- *Formula za površino: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Poiščite stranice škatle, pri katerih je površina najmanjša.

Rešitev: Odvajajmo funkcijo

$$P(x) = x^2 + \frac{4V}{x}$$

po x in odvod izenačimo z 0. Dobimo enačbo

$$P'(x) = 2x - \frac{4V}{x^2} = 0\,.$$

Sledi $2x^3 = 4V$, torej $x_0 = \sqrt[3]{2V}$. Prepričati se moramo, da je to minimum za vse $x > 0$. Na intervalu $(0, x_0)$ je odvod negativen, torej funkcija pada, na (x_0, ∞) pa je odvod pozitiven, torej funkcija narašča. Točka x_0 je globalni minimum za $x > 0$. Stranici sta

$$x = \sqrt[3]{2V} \qquad \textit{in} \qquad h = \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{4}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvod: 3 točke.*
- *Stacionarna točka: 3 točke.*
- *Predznaki odvoda: 3 točke.*
- *Intervali padanja ali naraščanja: 3 točke.*
- *Sklep o globalnem minimumu: 3 točke.*

3. (25) Funkcija f naj bo poljubno mnogokrat odvedljiva na $\mathbb{R}$. Naj bo $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ in naj velja zveza

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0\,.$$

a. (10) Označite $c_n = f^{(n)}(0)/n!$. S pomočjo Leibnizovega pravila pokažite

$$n^2 c_n + c_{n-2} = 0\,.$$

Rešitev: Enakost v besedilu naloge odvajamo n-krat po x. Dobimo

$$\begin{aligned} & x^2 f^{(n+2)}(x) + 2nx f^{(n+1)}(x) + n(n-1) f^{(n)}(x) + x f^{(n+1)}(x) + \\ + \quad & n f^{(n)}(x) + x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Vstavimo $x = 0$ in uporabimo oznako $c_n = f^{(n)}(0)/n!$. Dobimo

$$n! \cdot n(n-1) c_n + n! \cdot n c_n + (n-2)! \cdot n(n-1) c_{n-2} = 0\,.$$

Delimo z $n!$ in dobimo

$$n^2 c_n + c_{n-2} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje prvega člena: 2 točki.*
- *Odvajanje drugega člena: 2 točki.*
- *Odvajanje tretjega člena: 2 točki.*
- *Uvedba c_n: 2 točki.*
- *Urejanje in rezultat: 2 točki.*

b. (15) Zapišite Taylorjev polinom $2n$-te stopnje funkcije $f(x)$ v točki $x_0 = 0$.

Namig: Obravnavajte c_n posebej za lihe in za sode n.

Rešitev: Iz besedila naloge sledi $c_0 = 1$ in $c_1 = 0$. Ker je $c_1 = 0$, so vsi lihi c_n enaki 0. Označimo $a_n = c_{2n}$. Računamo

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-1}}{(2n)^2} \\ &= \frac{a_{n-2}}{(2n)^2(2(n-1))^2} \\ &= \cdots\cdots\cdots \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\,. \end{aligned}$$

Sledi

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Začetna člena: 3 točke.*
- *Lihi členi: 3 točke.*
- *Uporaba rekurzije: 3 točke.*
- *Iteracija rekurzije do a_0: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Integracija *per partes.*

a. (15) Dokažite, da je za vsak $n \geq 1$

$$\frac{1}{n!}\int_0^a x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\,.$$

Rešitev: V integralu

$$\int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

postavimo $f(x) = 1$ *in* $G(x) = e^{-x}$. *Integriramo per partes in dobimo*

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x &= xe^{-x}|_0^a + \int_0^a xe^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= ae^{-a} + \int_0^a xe^{-x}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Integriramo ponovno per partes z $f(x) = x$ *in* $G(x) = e^{-x}$. *Dobimo*

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x &= ae^{-a} + (\frac{x^2}{2}e^{-x}|_0^a + \frac{1}{2}\int_0^a x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x) \\ &= ae^{-a} + \frac{a^2}{2}e^{-a} + \frac{1}{2}\int_0^a x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Postopek nadaljujemo do n *in dobimo*

$$\int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^a x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

To je že želena identiteta.

Ocenjevanje:

- *Prva integracija per partes: 3 točke.*
- *Druga integracija per partes: 3 točke.*
- *Nadaljevanje per partes: 3 točke.*
- *končni rezultat: 6 točk.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^a \log(x + \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Uporabimo integracijo per partes. Postavimo $f(x) = 1$ *in* $G(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$. *Dobimo*

$$\int_0^a \log(x + \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x = x\cdot\log(x + \sqrt{1+x^2})|_0^a - \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Drugi integral zlahka izračunamo

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^a .$$

Kot rezultat dobimo

$$a \cdot \log(a + \sqrt{1+a^2}) - \sqrt{1+a^2} + 1 .$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je $f(x) = 1$: 3 točke.*
- *Integracija per partes: 3 točke.*
- *Drugi integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*