FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

1. kolokvij

1. december 2000

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ naj bo dvakrat zvezno odvedljiva in naj zadošča pogoju

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} + z^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z\,\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

a. (15) Pokažite, da funkcija $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$(x,y,z) \overset{g}{\mapsto} f(e^x, e^y, e^z)\,,$$

zadošča enačbi

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0\,.$$

Rešitev: Odvajamo po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij. Dobimo najprej

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^x, e^y, e^z)\cdot e^x\,.$$

Odvajajmo še enkrat parcialno na x. Dobimo

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^x, e^y, e^z)\cdot e^{2x} + \frac{\partial f}{\partial x}(e^x, e^y, e^z)\cdot e^x\,.$$

Podobno dobimo druge parcialne odvode na y in na z. Enakost, ki jo moramo dokazati, sledi s seštevanjem.

Ocenjevanje:

- *Odvajanje po x: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje argumentov: 3 točke.*
- *Odvajanje po x še enkrat: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje argumentov: 3 točke.*
- *Sesštevanje: 3 točke.*

b. (10) Naj bo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva in naj velja $h'(0) = h''(0) = 0$. Definirajte funkcijo ϕ s predpisom

$$t \overset{\phi}{\mapsto} f(e^{h(t)}, e^{h(t)}, e^{h(t)})\,.$$

Izračunajte $\phi''(0)$.

Rešitev: Zapišemo lahko $\phi(t) = g(h(t), h(t), h(t))$. Odvajamo po t in dobimo

$$\phi'(t) = g_x\cdot h' + g_y\cdot h' + g_z\cdot h'\,.$$

Odvajajmo po t še enkrat.

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= (g_{xx} + g_{xy} + g_{xz})\cdot(h')^2 + g_x h''\\ &+ (g_{xy} + g_{yy} + g_{yz})\cdot(h')^2 + g_x h''\\ &+ (g_{xz} + g_{yz} + g_{zz})\cdot(h')^2 + g_x h''\end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $h'(0) = h''(0) = 0$ in dobimo $\phi''(0) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da dovajamo $g(h(t), h(t), h(t))$: 2 točki.*
- *Prvo posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo posredno odvajanje: 2 točki.*
- *Upoštevanje $h''(0) = 0$: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

2. (25) Funkciji $f, g\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definirani na odprti množici $U = \{(x,y,z)\colon x > 0, y > 0, z > 0\}$, sta dani s predpisoma

$$(x,y,z) \overset{f}{\mapsto} (xy, xz, yz)$$

in

$$(u,v,w) \overset{g}{\mapsto} (\sqrt{uv/w}, \sqrt{uw/v}, \sqrt{vw/u})\,.$$

a. (10) Izračunajte matriki $Df(1,1,1)$ in $Dg(1,1,1)$.

Rešitev: Po definiciji je (i,j)-ti člen v matriki Df enak $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, kjer je f_i i-ta komponenta funkcije, x_j pa j-ta spremenljivka po vrsti. V našem primeru je recimo $f_1(x,y,z) = xy$. Dobimo

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}.$$

Vstavimo točko $(1,1,1)$ in dobimo

$$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobno dobimo

$$Dg(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Formula za (i,j)-ti člen: 2 točki.*
- *Kaj je f_i: 2 točki.*
- *Po kateri spremenljicki parcialno odvajamo kje: 2 točki.*
- *$Df(x,y,z)$: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte odvod sestavljene funkcije $g(f(\mathbf{x}))$ v poljubni točki $\mathbf{x} \in U$.

Rešitev: Po formuli za odvajanje sestavljenih funkcij je odvod sestavljene funkcije enak

$$Dg(xy, xz, yz) \cdot Df(x,y,z)\,.$$

Drugo matriko v produktu smo že izračunali v a. Izračunamo še

$$Dg(u,v,w) = \begin{pmatrix} \sqrt{v/uw}/2 & \sqrt{u/vw}/2 & -\sqrt{uv/w^3}/2 \\ \sqrt{w/uv}/2 & -\sqrt{uw/v^3}/2 & \sqrt{u/vw}/2 \\ -\sqrt{vw/u^3}/2 & \sqrt{w/uv}/2 & \sqrt{v/uw}/2 \end{pmatrix}.$$

Dobimo

$$Dg(xy, xz, yz) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2y} & \frac{1}{2z} & -\frac{x}{2yz} \\ \frac{1}{2x} & -\frac{y}{2xz} & \frac{1}{2z} \\ -\frac{z}{2xy} & \frac{1}{2x} & \frac{1}{2y} \end{pmatrix}.$$

Zmnožimo in ugotovimo, da je $Dg(xy, xz, yz) \cdot Df(x, y, z) = \mathbf{I}$.

Ocenjevanje:

- *Formula za odvod sestavljene funkcije: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje: 3 točke.*
- *Komponente g: 3 točke.*
- *Parcialni odvodi: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (25) Dana naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz - 1\,.$$

a. (10) Pokažite, da na neki okolici U točke $(x_0, y_0) = (1,1)$ obstaja zvezno parcialno odvedljiva funkcija $g\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, taka da je $g(1,1) = -1$ in $f(x,y,g(x,y)) = 0$ za vse $(x,y) \in U$. Izračunajte še $g_x(1,1)$ in $g_y(1,1)$.

Rešitev: Obstoj iskane funkcije nam bo zagotavljal izrek o implicitni funkciji. Zlahka preverimo, da je $f(1,1,-1) = 0$. Preveriti moramo še $f_z(1,1,-1) = -2 \neq 0$. Torej taka funkcija g obstaja na neki okolici (x_0, y_0).

Za izračun parcialnih odvodov uporabimo znani formuli

$$g_x(1,1) = -\frac{f_x(1,1,-1)}{f_z(1,1,-1)} \qquad \textit{in} \qquad g_y(1,1) = -\frac{f_y(1,1,-1)}{f_z(1,1,-1)}\,.$$

Ugotovimo, da je $f_x(1,1,-1) = 0$ in $f_y(1,1,-1) = 0$, torej je $g_x(1,1) = 0$ in $g_y(1,1) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $f(x_0, y_0, z_0) = 0$: 2 točki.*
- *Preverjanje $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *Formuli za g_x in g_y : 2 točki.*
- *Rezultata: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte Hessovo matriko funkcije g v točki $(1,1)$ in sklepajte, da ima v $(1,1)$ funkcija g lokalni minimum.

Rešitev: Izračunati moramo druge parcialne odvode g_{xx}, g_{xy} in g_{yy}. Enakost $f(x,y,g(x,y)) = 0$ odvajamo dvakrat po x na levi in desni. Dobimo

$$f_x + f_z \cdot g_x = 0$$

in

$$f_{xx} + f_{xz} \cdot g_x + (f_{xz} + f_{zz} \cdot g_x) \cdot g_x + f_z \cdot g_{xx} = 0\,.$$

Ker je $g_x(1,1) = g_y(1,1) = 0$, sledi, da je

$$f_{xx}(1,1,-1) + f_z(1,1,-1) \cdot g_{xx}(1,1) = 0\,,$$

torej $g_{xx}(1,1) = 1$. Podobno dobimo

$$f_{yy}(1,1,-1) + f_z(1,1,-1) \cdot g_{yy}(1,1) = 0\,,$$

torej $g_{yy}(1,1) = 1$. Potrebujemo še $g_{xy}(1,1)$. S posrednim odvajanjem dobimo

$$f_{xy}(1,1,-1) + f_z(1,1,-1) \cdot g_{xy}(1,1) = 0\,,$$

torej $g_{xy}(1,1) = 0$. *Dobimo*

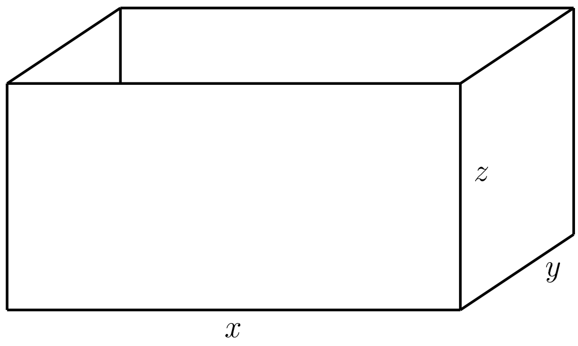
$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lastni vrednosti Hessejeve matrike sta očitno pozitivni, zato je dana točka lokalni minimum.

Ocenjevanje:

- *Prvo posredno odvajanje: 3 točke.*
- *Drugo posredno odvajanje: 3 točke.*
- *Upoštavanje* $g_x(1,1) = g_y(1,1) = 0$: *3 točke.*
- *Vsi drugi parialni odvodi: 3 točke.*
- *Pozitivna definitnost Hessejeve matrike in sklep: 2 točki.*

4. (25) Škatla v obliki kvadra (brez vrhnje ploskve) ima stranice x, y in z kot na sliki 1. Površina škatle je dana in enaka a, torej $xy + 2xz + 2yz = a$. Iščemo škatlo s to površino in največjo možno prostornino.



Slika 1 Škatla s stranicami x, y in z.

a. (10) Izpeljite, da iščemo vezani ekstrem funkcije $f(x,y,z) = xyz$ pri pogoju $g(x,y,z) = xy+2xz+2yz-a = 0$ in se prepričajte, da mora veljati $3xyz = 2\lambda a$.

Rešitev: Očitno je prostornina škatle enaka $V = xyz$. Ker ni zgornje ploskve, je površina enaka $xy + 2xz + 2yz$. Ker je površina dana, mora biti vez enaka $g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - a = 0$.

Iščemo vezani ekstrem funkcije $f(x,y,z) = xyz$ pri pogoju

$$g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - a = 0\,.$$

Po Lagrangeovem pravilu sestavimo novo funkcijo

$$F(x,y,z) = xyz - \lambda(xy + 2xz + 2yz - a)\,.$$

Odvajamo parcialno na vse tri spremenljivke in dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= yz - \lambda(y + 2z) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= xz - \lambda(x + 2z) \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= xy - \lambda(2x + 2y)
\end{aligned}$$

Parcialne odvode izenačimo z 0 in poskušamo najti rešitev, ki ustreza tudi pogoju. Prvo enačbo pomnožimo z x, drugo z y in tretjo z z in seštejemo. Dobimo

$$3xyz - \lambda(2xy + 4xz + 4yz) = 0\,.$$

Sledi, da bo $3xyz = 2\lambda a$.

Ocenjevanje:

- *Vez in funkcija, ki jo maksimiziramo: 2 točki.*
- *Lagrangeova funkcija: 2 točki.*
- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Ideja z množenjem enačb: 2 točki.*
- *Enakost $3xyz = 2\lambda a$: 2 točki.*

b. (15) Poiščite dolžine stranic, za katere bo imela škatla pri zgornjem pogoju največjo prostornino $V = xyz$.

Rešitev: Iz a. vemo, da moramo poiskati rešitev enačb

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= yz - \lambda(y + 2z) - 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= xz - \lambda(x + 2z) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= xy - \lambda(2x + 2y) = 0
\end{aligned}
$$

ki ustreza tudi pogoju $g(x, y, z) = 0$. Vemo, da bo $3xyz = 2\lambda a$. Iz prvih dveh enačb sledi

$$
\begin{aligned}
xyz - \lambda(xy + 2xz) &= 0 \\
xyz - \lambda(xy + 2yz) &= 0
\end{aligned}
$$

Sledi, da je $x = y$. Iz tretje enačbe dobimo

$$x^2 - \frac{12x^3z}{2a} = 0\,,$$

torej $xz = yz = a/6$. Upoštevajmo še, da mora veljati $2xz + 2yz + xy = a$. Sledi

$$\frac{2a}{6} + \frac{2a}{6} + x^2 = a\,,$$

torej ali $x = y = \sqrt{a/3}$ in $z = \sqrt{3a}/6$.

Opomba: Ves čas privzemamo, da nobena od spremenljivk x, y ali z ni enaka 0, saj je v nasprotnem primeru prostornina 0, kar gotovo ni največja možna prostornina.

Ocenjevanje:

- *Enačbe: 3 točke.*
- *Opažanje, da je $x = y$: 3 točke.*
- *Enačba, ki povezuje x in z: 3 točke.*
- *Kvadratna enačba za x: 3 točke.*
- *Rešitev: 3 točke.*