FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

1. kolokvij

2. december 2004

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:**

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bodo a,b in c števila, za katera velja $a^2+b^2+c^2=1$. Naj bo $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$ dan vektor. Označite $s=a\alpha+b\beta+c\gamma$. Za funkcijo $u\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ naj velja

$$(bz-cy)u_x(x,y,z)+(cx-az)u_y(x,y,z)+(ay-bx)u_z(x,y,z)=0\,.$$

Definirajte funkcije $x,y,z\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom

$$\begin{array}{rcl} x(t) &=& as+(\alpha-as)\cos t+(b\gamma-c\beta)\sin t\\ y(t) &=& bs+(\beta-bs)\cos t+(-a\gamma+c\alpha)\sin t\\ z(t) &=& cs+(\gamma-cs)\cos t+(a\beta-b\alpha)\sin t \end{array}\,.$$

a. (15) Pokažite, da je $bz-cy=\dot{x}$, $cx-az=\dot{y}$ in $ay-bx=\dot{z}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -(\alpha-as)\sin t+(b\gamma-c\beta)\cos t\\ \dot{y} &=& -(\beta-bs)\sin t+(-a\gamma+c\alpha)\cos t\\ \dot{z} &=& -(\gamma-cs)\sin t+(a\beta-b\alpha)\cos t \end{array}\,.$$

Računamo z uporabo enakosti $a^2+b^2+c^2=1$.

$$\begin{array}{rcl} bz-cy &=& (b\gamma-c\beta)\cos t+(ab\beta-b^2\alpha+ac\gamma-c^2\alpha)\sin t\\ &=& (b\gamma-c\beta)\cos t+(ab\beta+ac\gamma-(1-a^2)\alpha)\sin t\\ &=& (b\gamma-c\beta)\cos t+(ab\beta+ac\gamma-(1-a^2)\alpha)\sin t\\ &=& (b\gamma-c\beta)\cos t+(a(a\alpha+b\beta+c\gamma)-\alpha)\sin t\\ &=& (b\gamma-c\beta)\cos t+(as-\alpha)\sin t\\ &=& \dot{x}(t)\,. \end{array}$$

Podobno preverimo, še ostali dve enakosti.

Ocenjevanje:

- *Odvodi $\dot{x}$, $\dot{y}$ in $\dot{z}$: 3 točke.*
- *Izračun $bz-cy$: 3 točke.*
- *Upoštevanje $a^2+b^2+c^2=1$ in prva enakost: 3 točke.*
- *Druga enakost: 3 točke.*
- *Tretja enakost: 3 točke.*

b. (15) Definirajte funkcijo $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom

$$\phi(t)=u(x(t),y(t),z(t))\,.$$

Izračunajte $\phi'(t)$.

Rešitev: Po pravilih za odvajanje sestavljenih funkcij je

$$\phi'(t)=u_x(x,y,z)\dot{x}(t)+u_y(x,y,z)\dot{y}(t)+u_z(x,y,z)\dot{z}(t)\,.$$

Pišimo krajše kar u_x za $u_x(x,y,z)$ in podobno za u_y in u_z. Vstavimo namesto odvodov $\dot{x}$, $\dot{y}$ in $\dot{z}$ izraze iz a. in dobimo

$$\phi'(t)=(bz-cy)u_x+(cx-az)u_y+(ay-bx)u_z=0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula za odvod sestavljena funkcije: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Ideja uporabiti a.: 2 točki.*
- *Opažanje, da dobimo izraz iz besedila: 2 točki.*
- *Sklep, da je $\phi'(t) = 0$: 2 točki.*

2. (25) Funkcija g naj bo na področju $U = \{(x, y)\colon y > 0\}$ definirana s predpisom

$$(x, y) \overset{g}{\mapsto} \left(\frac{y}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}, \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right) .$$

Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pa naj bo definirana kot

$$(u, v) \overset{f}{\mapsto} \left(\frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv \right) .$$

a. (15) Naj bo funkcija $F\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana kot $F(x, y) = f(g(x, y))$. Izračunajte $DF(x, y)$ za $(x, y) \in U$.

Namig:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{y^2} .$$

Zaradi preglednosti vpeljite oznaki

$$s = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \qquad \textit{in} \qquad d = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Rešitev: Po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij računamo

$$Df(u, v) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

in

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}} & \frac{\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}} \end{pmatrix}$$

Zaradi preglednosti označimo $s = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$ *in* $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, *tako da je*

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2ds} & \frac{s}{2d} \\ -\frac{s}{2d} & \frac{y}{2ds} \end{pmatrix}$$

Računamo

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{s} & -s \\ s & \frac{y}{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{y}{2ds} & \frac{s}{2d} \\ -\frac{s}{2d} & \frac{y}{2ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ocenjevanje:

- *Df: 3 točke.*
- *Dg: 3 točke.*
- *Vstavljanje $g(x, y)$ v Df: 3 točke.*

– *Množenje matrik: 3 točke.*
– *Poenostavljanje: 3 točke.*

b. (10) Definirajte funkcijo $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$G(x,y) = f(f(f(f(x,y))))\,.$$

Izračunajte $DG(0,1)$.

Rešitev: Uporabimo pravilo za odvajanje sestavljenih funkcij.

$$DG(0,1) = Df(f(f(f(0,1)))) \cdot Df(f(f(0,1))) \cdot Df(f(0,1)) \cdot Df(0,1)\,.$$

Računamo po vrsti

$$Df(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Df(f(0,1)) = Df(-1/2,0) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$Df(f(f(0,1))) = Df(1/8,0) = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

in

$$Df(f(f(f(0,1)))) = Df(1/128,0) = \begin{pmatrix} 1/128 & 0 \\ 0 & 1/128 \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$DG(0,1) = \begin{pmatrix} 1/128 & 0 \\ 0 & 1/128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

torej

$$DG(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2048 \\ -1/2048 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

– *Formula za sestavljene funkcije: 2 točki.*
– *1. vstavljanje: 2 točki.*
– *2. vstavljanje: 2 točki.*
– *3. vstavljanje: 2 točki.*
– *Množenje matrik: 2 točki.*

3. (25) Funkcija $F : \mathbb{R}^{\not\models} \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2\,.$$

a. (10) Dokažite, da na primerni okolici U točke $(x_0, y_0) = (0, 0)$ obstaja funkcija $g\colon \mathbb{R}^{\not\models} \to \mathbb{R}$, taka da je $g(0, 0) > 0$ in $F(x, y, g(x, y)) = 0$ za $(x, y) \in U$. Izračunajte še $g_x(0, 0)$ in $g_y(0, 0)$.

Rešitev: Najprej najdemo točko (x_0, y_0, z_0), za katero bo $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ in $z_0 > 0$. Zlahka se prepričamo, da je to točka $(0, 0, 1)$. Po izreku o implicitni funkciji obstaja okolica U točke $(0, 0)$ in funkcija g, če je $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Izračunamo $F_z(0, 0, 1) = 4$. Parcialne odvode izračunamo po formuli

$$\begin{aligned} g_x(0,0) &= -\frac{F_x(0,0,1)}{F_z(0,0,1)} = -\frac{1}{2} \\ g_y(0,0) &= -\frac{F_y(0,0,1)}{F_z(0,0,1)} = 0 \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Točka (x_0, y_0, z_0): 2 točki.*
- *Preverjanje $F_z(0, 0, 1) \neq 0$: 2 točki.*
- *Citiranje izreka o implicitni funkciji: 2 točki.*
- *$g_x(0, 0)$: 2 točki.*
- *$g_y(0, 0)$: 2 točki.*

b. (15) Najdite točko na ploskvi $F(x, y, z) = 0$, za katero je tangentna ravnina na ploskev vzporedna z xy-ravnino in je $z > 0$.

Rešitev: Po izreku o implicitni funkciji pridejo v poštev točke na ploskvi, za katere je $F_x(x, y, z) = 0$ in $F_y(x, y, z) = 0$. Iz teh dveh zahtev dobimo enačbi

$$\begin{aligned} 2x + 2z &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}$$

Sledi $y = 0$, in ker mora biti točka tudi na ploskvi, mora veljati

$$x^2 + 2z^2 + 2xz - 2 = x^2 - 2 = 0\,.$$

Torej je $x = \pm\sqrt{2}$. Ker je $z = -x$ izberemo točko $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$. Utemeljiti moramo le še uporabo izreka o implicitni funkciji, torej

$$F_z(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \neq 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja o parcialnih odvodih: 3 točke.*
- *Enačbi za parcialne odvode: 3 točke.*
- *Enačbe za x, y in z: 3 točke.*
- *Rešitev: 3 točke.*
- *Naknadno preverjanje $F_z(x, y, z) \neq 0$: 3 točke.*

4. (25) Naj bosta $a > 0$ in $b > 0$ števili, za kateri velja $ab = 1$. Na območju $G = \{(x,y,z)\colon x > 0, z > 0, xz - y^2 > 0\}$ naj bo definirana funkcija

$$f(x,y,z) = \frac{\alpha}{2}\log(xz - y^2) - \frac{1}{2}(ax + bz)\,,$$

kjer je $\alpha > 0$ dano število.

a. (10) Pokažite, da je točka $(\alpha b, 0, \alpha a)$ lokalni maksimum funkcije $f(x,y,z)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\alpha z}{2(xz-y^2)} - \frac{a}{2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -\frac{\alpha y}{(xz-y^2)}\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\alpha x}{2(xz-y^2)} - \frac{b}{2}\end{aligned}$$

Z vstavljanjem točke $(\alpha b, 0, \alpha a)$ ugotovimo, da so vsi parcialni odvodi enaki 0. Dana točka je stacionarna. Potrebujemo še Hessejevo matriko v točki $(\alpha b, 0, \alpha a)$. Računamo, recimo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= -\frac{\alpha z^2}{2(xz-y^2)^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z) &= -\frac{\alpha yz}{(xz-y^2)^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z) &= -\frac{\alpha y^2}{2(xz-y^2)^2}\end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $ab = 1$ in dobimo

$$Hf(\alpha b, 0, \alpha a) = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2\alpha} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{b^2}{2\alpha}\end{pmatrix}\,.$$

Diagonalni elementi Hessove matrike v točki $(\alpha b, 0, \alpha a)$ so negativni, zato je matrika negativno definitna. Stacionarna točka je lokalni maksimum.

Ocenjevanje:

- *Parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje točke: 2 točki.*
- *Drugi parcialni odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Sklep o lokalnem maksimumu: 2 točki.*

b. (15) Naj bo funkcija $g\colon G \to \mathbb{R}$ dana z

$$g(x,y,z) = xz - y^2 - 1\,.$$

Poščite stacionarne točke funkcije $f(x,y,z)$ na območju G pri pogoju $g(x,y,z) = 0$.

Rešitev: Najprej opazimo, da lahko namesto s funkcijo $f(x,y,z)$ računamo kar s funkcijo

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{2}(ax + bz)\,,$$

Po Lagrangu sestavimo funkcijo $F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$. *Računamo*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) &= -\tfrac{a}{2} - \lambda z \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= 2y\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= -\tfrac{b}{2} - \lambda x \end{aligned}$$

Parcialne odvode izenačimo z 0. *Iz prve ali tretje enačbe razberemo, da mora biti* $\lambda \neq 0$. *Druga enačba potem pove, da je* $y = 0$. *Iz pogoja* $g(x,y,z) = 0$ *potem sledi, da je* $xz = 1$. *Z nekaj računanja dobimo* $x = b$ *in* $z = a$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da lahko prvi člen zanemarimo: 3 točke.*
- *Lagrangova funkcija: 3 točke.*
- *Parcialno odvajanje: 3 točke.*
- *Enačbe za točko: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*