1. kolokvij iz Matematike 2b

Fakulteta za strojništvo

30. marec 2009

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{2x^2 - 9x + 27}{x^4 - 6x^3 + 9x^2}\, dx.$$

Rešitev: Racionalno funkcijo razcepimo na vsoto parcialnih ulomkov:

$$\frac{2x^2 - 9x + 27}{x^2(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2},$$

kjer je

$$A = 1, \qquad B = 3, \qquad C = -1, \qquad D = 2.$$

Integral je zato enak

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 9x + 27}{x^4 - 6x^3 + 9x^2}\, dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} \right) dx \\ &= \ln|x| - 3\frac{1}{x} - \ln|x-3| - 2\frac{1}{x-3} + C \\ &= \ln\left|\frac{x}{x-3}\right| - \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} + C. \end{aligned}$$

2. (25) Naj bo f zvezno odvedljiva funkcija in C konstanta. Pokažite, da velja

$$\int (f(x) + f'(x))e^x \, dx = f(x)e^x + C.$$

Rešitev: Za dokaz zgornje enakost je potrebno le odvajati desno stran. Ker je

$$(f(x)e^x + C)' = f'(x)e^x + f(x)e^x,$$

zgornja enakost očitno velja.

S pomočjo zgornje enakosti izračunajte

$$\int_0^1 \frac{x-2}{(x+1)^4}\, e^x \, dx.$$

Namig: $x - 2 = x + 1 - 3$.

Rešitev: Z upoštevanjem namiga zapišemo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x-2}{(x+1)^4}\, e^x \, dx &= \int_0^1 \left(\frac{x+1}{(x+1)^4} - \frac{3}{(x+1)^4} \right) e^x \, dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^4} \right) e^x \, dx \\
&= \int_0^1 (f(x) + f'(x))e^x \, dx, \qquad \text{za} \quad f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} \\
&= f(x)e^x \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{(x+1)^3}\, e^x \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{8}\, e - 1
\end{aligned}$$

3. (25) Z dvakratno integracijo po delih (per partes) pokažite, da velja za integral

$$I_n = \int_0^1 (\arcsin x)^n \, dx; \qquad n \in \mathbb{N}$$

rekurzivna formula

$$I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)\, I_{n-2}; \qquad n \geq 2.$$

Uporabite jo za izračun integrala I_3.

Rešitev: Najprej vzamemo $u = (\arcsin x)^n$ *in* $dv = dx$, *zato je* $du = n(\arcsin x)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ *in* $v = x$. *Sledi*

$$\int_0^1 (\arcsin x)^n \, dx = x(\arcsin x)^n \Big|_0^1 - n \int_0^1 (\arcsin x)^{n-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Pri drugi per partes integraciji izberemo $u = (\arcsin x)^{n-1}$ *in* $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$. *Sledi* $du = (n-1)(\arcsin x)^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$, $v = -\sqrt{1-x^2}$ *in*

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (\arcsin x)^n \, dx \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left(-\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)^{n-1} \Big|_0^1 + (n-1) \int_0^1 (\arcsin x)^{n-2} \, dx \right) \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1) \int_0^1 (\arcsin x)^{n-2} \, dx \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1) I_{n-2}
\end{aligned}$$

S per partes integracijo izračunamo tudi integral I_1*:*

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_0^1 \arcsin x \, dx &= x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Sledi

$$I_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3 \cdot 2 I_1 = \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6.$$

4. (25) Dolžina loka krivulje, podane s funkcijo $y = f(x)$, je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

za $x \in [a, b]$. Izračunajte dolžino loka krivulje $y = \arcsin(e^{-x})$ za $x \in [0, 1]$.
Namig: V integral vpeljite novo spremenljivko $1 - e^{-2x} = t^2$.

Rešitev: Ker je

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}\,(-e^{-x})$$

in

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{1 - e^{-2x}},$$

sledi (z uvedbo nove spremenljivke $1 - e^{-2x} = t^2$*)*

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}\, dx = \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{1}{t}\,\frac{t}{1 - t^2}\, dt \\ &= \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{1}{1 - t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| \Bigg|_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2}}} \right| . \end{aligned}$$