FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

1. kolokvij

29. november 2002

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo funkcija $u = u(\xi, \eta)$ dvakrat zvezno odvedljiva na množici $U = \{(\xi, \eta) : \eta > 0\}$ in naj zadošča enakosti

$$u_{\xi\xi}(\xi, \eta) - \eta\, u_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0\,.$$

Definirajte funkcijo $v\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$v(x, y) = u\left(\frac{x+y}{2}, \frac{(x-y)^2}{16}\right)\,,$$

kjer je $V = \{(x, y)\colon x > y\}$.

a. (15) Izračunajte $v_{xy}(x, y)$.

Rešitev: Označimo

$$\xi(x, y) = \frac{x+y}{2} \qquad \textit{in} \qquad \eta(x, y) = \frac{(x-y)^2}{16}\,.$$

Po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij je

$$v_x(x, y) = u_\xi(\xi, \eta) \cdot \frac{1}{2} + u_\eta(\xi, \eta) \cdot \frac{(x-y)}{8}\,.$$

Odvajamo ponovno in dobimo

$$\begin{aligned}
v_{xy}(x, y) &= \left(u_{\xi\xi}(\xi, \eta) \cdot \frac{1}{2} - u_{\xi\eta}(\xi, \eta) \cdot \frac{(x-y)}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} + \\
&\quad + \left(u_{\xi\eta}(\xi, \eta) \cdot \frac{1}{2} - u_{\eta\eta}(\xi, \eta) \cdot \frac{(x-y)}{8}\right) \cdot \frac{(x-y)}{8} - \frac{1}{8}\, u_\eta(\xi, \eta) \\
&= \frac{1}{4} u_{\xi\xi}(\xi, \eta) - \frac{(x-y)^2}{64} u_{\eta\eta}(\xi, \eta) - \frac{1}{8}\, u_\eta(\xi, \eta) \\
&= \frac{1}{4}\left(u_{\xi\xi}(\xi, \eta) - \eta\, u_{\eta\eta}(\xi, \eta)\right) - \frac{1}{8}\, u_\eta(\xi, \eta) \\
&= -\frac{1}{8}\, u_\eta(\xi, \eta)\,.
\end{aligned}$$

V zadnji vrsti smo upoštevali enakost, ki ji zadošča funkcija u.

Ocenjevanje:

- *Prvi odvod: 3 točke.*
- *Drugi odvod, prvi kos: 3 točke.*
- *Drugi odvod, drugi kos: 3 točke.*
- *Upoštevanje parcialne diferencialne enačbe: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$4v_{xy}(x,y) + \frac{2}{x-y}(v_x(x,y) - v_y(x,y))\,.$$

Rešitev: Obdržimo oznake iz rešitve a. dela naloge. Manjka nam še

$$v_y(x,y) = u_\xi(\xi,\eta)\cdot\frac{1}{2} - u_\eta(\xi,\eta)\cdot\frac{(x-y)}{8}\,.$$

Sledi

$$v_x(x,y) - v_y(x,y) = \frac{(x-y)}{4}u_\eta(\xi,\eta)\,,$$

torej

$$\frac{v_x(x,y) - v_y(x,y)}{x-y} = \frac{1}{2}u_\eta(\xi,\eta)\,.$$

Dobimo

$$4v_{xy}(x,y) + \frac{2}{x-y}(v_x(x,y) - v_y(x,y)) = -\frac{1}{2}u_\eta(\xi,\eta) + \frac{1}{2}u_\eta(\xi,\eta) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvod v_y: 2 točki.*
- *Izračun $v_x - v_y$: 2 točki.*
- *Uporaba a.: 2 točki.*
- *Preureditev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (25) Naj bo $f = (f_1, f_2, f_3)\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dana z

$$(x,y) \overset{f}{\mapsto} \left(\frac{\sqrt{2}xy}{2}, \frac{\sqrt{2}xy}{2}, \frac{1}{4}(y^2 - x^2) \right),$$

kjer je $U = \{(x,y)\colon x > 0, y > 0\}$. Naj bo $g = (g_1, g_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dana z

$$(u,v,w) \overset{g}{\mapsto} \left(\sqrt{\sqrt{u^2+v^2+w^2} - w}, \sqrt{\sqrt{u^2+v^2+w^2} + w} \right).$$

a. (15) Izračunajte $Df(1,1)$ in $Dg(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$.

Rešitev: Računamo

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}y}{2} & \frac{\sqrt{2}x}{2} \\ \frac{\sqrt{2}y}{2} & \frac{\sqrt{2}x}{2} \\ -x/2 & y/2 \end{pmatrix}.$$

Označimo $s = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$ *in računamo*

$$Dg(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{u}{2s\sqrt{s-w}} & \frac{v}{2s\sqrt{s-w}} & \frac{w-s}{2s\sqrt{s-w}} \\ \frac{u}{2s\sqrt{s+w}} & \frac{v}{2s\sqrt{s+w}} & \frac{w+s}{2s\sqrt{s+w}} \end{pmatrix}.$$

Vstavimo ustrezne točke in dobimo

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

in

$$Dg(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Kaj je odvod f: 3 točke.*
- *Kam parcialne odvode?: 3 točke.*
- *Parcialni dovodi f_i: 3 točke.*
- *Parcialni dovodi g_i: 3 točke.*
- *Vstavljanje točk: 3 točke.*

b. (10) Naj bo $F(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$ sestavljena funkcija $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Izračunajte $DF(1,1)$.

Rešitev: Po definiciji je $DF(x,y)$ matrika dimenzije 2×2. Opazimo, da je $f(1,1) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. Po pravilu za odvajanje sestavljenih funkcij je

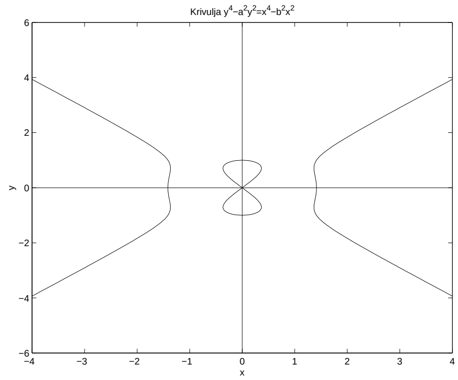
$$\begin{aligned} DF(1,1) &= Dg(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \cdot Df(1,1) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za odvajanje sestavljenih funkcij: 3 točke.*
- *Opažanje, da je* $f(1,1) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$*: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 3 točke.*
- *Množenje martik: 2 točki.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (25) Na sliki 1 je "hudičeva krivulja" [1] dana implicitno z enačbo

$$F(x,y) = y^4 - y^2 - x^4 + 2x^2 = 0\,.$$



Sl. 1 Hudičeva krivulja $F(x,y) = 0$.

a. (10) Točka $(0,1)$ leži na hudičevi krivulji. Pokažite, da na neki okolici U točke $x_0 = 0$ obstaja taka funkcija $h(x)$, da je $h(0) = 1$ in

$$F(x,h(x)) = h^4(x) - h^2(x) - x^4 + 2x^2 = 0\,.$$

Izračunajte še $h''(0)$.

Rešitev: Uporabimo izrek o implicitni funkciji za funkcijo

$$F(x,y) = y^4 - y^2 - x^4 + 2x^2\,.$$

Preverimo $F(0,1) = 0$ in

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0\,.$$

Izrek o implicitni funkciji nam zagotavlja obstoj želene funkcije h. Za izračun drugega odvoda odvajajmo identiteto $F(x,h(x)) = 0$. Dobimo

$$F_x(x,h(x)) + F_y(x,h(x)) \cdot h(x) = 0$$

in s ponovnim odvajanjem po x

$$F_{xx} + F_{xy} \cdot h' + (F_{xy} + F_{yy} \cdot h') \cdot h' + F_y \cdot h'' = 0\,.$$

Upoštevajmo, da je $h'(0) = 0$ in $F_{xx}(0,1) = 2$ in dobimo

$$h''(0) = -1\,.$$

[1] Ime je dal matematik G. Cramer leta 1750

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je potreben izrek o implicitni funkciji: 3 točke.*
- *Preverjanje predpostavk: 3 točke.*
- *Prvo odvajanje identitete: 3 točke.*
- *Drugo odvajanje identitete: 3 točke.*
- *Drugi odvod: 3 točke.*

b. (10) Točka $(\sqrt{2}, 0)$ tudi leži na krivulji, dani imlicitno z $F(x, y) = y^4 - y^2 - x^4 + 2x^2 = 0$. Pokažite, da obstaja na neki okolici točke $y_0 = 0$ taka funkcija $g(y)$, da velja $g(0) = \sqrt{2}$ in $F(g(y), y) = 0$. Pokažite, da ima $g(y)$ v točki $y_0 = 0$ lokalni maksimum.

Rešitev: Spet uporabimo izrek o implicitni funkciji, le da sta tokrat vlogi x in y zamenjani. Označimo $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 0)$. Vemo, da je

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad \textit{in} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0^3 - 4x_0 = 4\sqrt{2} \neq 0\,.$$

Izrek o implicitni funkciji zagotavlja obstoj funkcije $g(y)$. Vemo, da je

$$g'(x_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)} = 0\,.$$

Za drugi odvod odvajamo enakost $F(g(y), y) = 0$ po y. Dobimo

$$F_x(g(y), y)g'(y) + F_y(g(y), y) = 0\,.$$

Odvajamo po y še enkrat. Dobimo

$$(F_{xx}g' + F_{xy})g' + F_x g'' + F_{xy}g' + F_{yy} = 0\,.$$

Vstavimo točko $(\sqrt{2}, 0)$ in upoštevamo $g'(0) = 0$. Dobimo

$$-4\sqrt{2}g''(0) - 2 = 0\,,$$

torej

$$g''(0) = -1/4\,.$$

Točka je res lokalni maksimum.

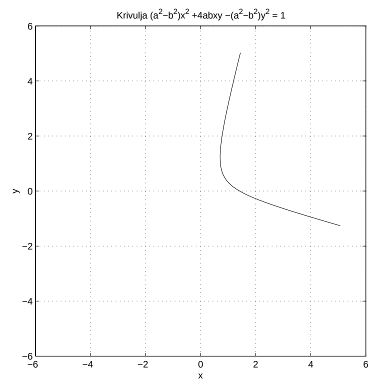
Ocenjevanje:

- *Preverjanje prve predpostavke: 2 točki.*
- *Preverjanje druge predpostavke: 2 točki.*
- *Prvi odvod g: 2 točki.*
- *Drugi odvod g: 2 točki.*
- *Sklep o lokalnem maksimumu: 2 točki.*

4. (25) Komet leti po krivulji dani implicitno z enačbo

$$(a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2=1$$

za $a, b > 0$ in $a^2+b^2=1$. Zamislite si, da je zemlja v izhodišču koordinatnega sistema. Želimo izračunati najmanjšo možno razdaljo kometa od zemlje.



Sl. 2 Pot kometa dana z $(a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2=1$.

a. (10) Pokažite, da točka (x, y), ki je najbližje zemlji na poti kometa, ustreza enačbama

$$x-\lambda\big((a^2-b^2)x+2aby\big)=0$$

in

$$y-\lambda\big(2abx-(a^2-b^2)y\big)=0$$

za nek λ. Ugotovite še, da je $x^2+y^2=\lambda$.

Namig: Za drugo vprašanje množite prvo enačbo z x, drugo z y in seštejte.

Rešitev: Definirajmo

$$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad \textit{in} \qquad g(x,y)=(a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2-1\,.$$

Iščemo ekstrem funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = 0$. Opomba: $x^2 + y^2$ je sicer kvadrat razdalje, vendar doseže razdalja minimum natanko takrat, ko doseže minimum njen kvadrat. Po Lagrangeu sestavimo novo funkcijo

$$F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)\,.$$

Odvajamo najprej parcialno na x in potem na y in izenačimo z 0. Po krajšanju z 2 dobimo natanko želene enačbe.

Množimo prvo od enačb z x in drugo z y in seštejmo. Dobimo

$$x^2+y^2-\lambda\left((a^2-b^2)x^2+4abxy-(a^2-b^2)y^2\right)=0\,.$$

Izraz v oklepaju je za točke na krivulji enak 1, torej je $x^2+y^2=\lambda$.

Ocenjevanje:

- *Razdalja: 2 točki.*
- *Lagrangeov nastavek: 2 točki.*
- *Prvo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo parcialno odvajanje: 2 točki.*
- $x^2 + y^2 = \lambda$: *2 točki.*

b. (15) Poiščite točko na krivulji, ki je najbližja zemlji.

Namig: Enačbi sta homogen sistem linearnih enačb. Tak ima netrivialno rešitev le, če je determinanta sistema enaka 0*. Poleg tega iz a. vemo, da je* $\lambda > 0$*.*

Rešitev: Rešiti moramo enačbi

$$x - \lambda\left((a^2-b^2)x + 2aby\right) = 0$$

in

$$y - \lambda\left(2abx - (a^2-b^2)y\right) = 0\,.$$

Prepišimo

$$\begin{array}{rcrcl} (1-\lambda(a^2-b^2))x & - & 2\lambda aby & = & 0 \\ -2\lambda abx & + & (1+\lambda(a^2-b^2))y & = & 0 \end{array}$$

Ta homogen sistem linearnih enačb ima netrivialno rešitev, če velja

$$(1-\lambda(a^2-b^2))(1+\lambda(a^2-b^2)) - 4\lambda^2a^2b^2 = 0\,.$$

Preuredimo in upoštevamo $a^2+b^2=1$*. Dobimo*

$$1 - \lambda^2((a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2) = 1 - \lambda^2\,.$$

Sledi $\lambda = \pm 1$*. Iz a. vemo, da je* $\lambda = x^2+y^2$*, zato pride v poštev le* $\lambda = 1$*. Enačba*

$$(1-\lambda(a^2-b^2))x - 2\lambda aby = 0$$

postane

$$2b^2x - 2aby = 0\,,$$

torej je $bx = ay$*. Enačbi ustreza točka* (a,b)*, ki je tudi na krivulji* $g(x,y)=0$*. Ta točka je torej najbližja.*

Ocenjevanje:

- *Prepis v sistem: 3 točke.*
- *Determinanta: 3 točke.*
- *Preureditev in rešitve za* λ*: 2 točki.*
- *Enačba za* x *in* y*: 3 točke.*
- *Končna rešitev: 3 točke.*