FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

2. kolokvij

28. februar 2003

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

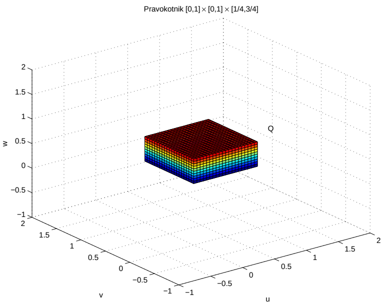
Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

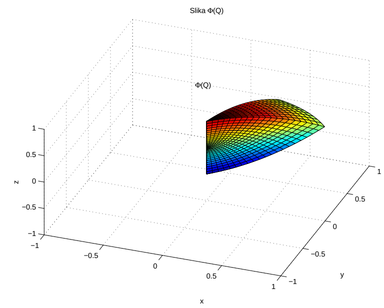
1. (25) Preslikava $\Phi\colon V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom

$$(u,v,w) \overset{\Phi}{\mapsto} \left(uvw, uv\sqrt{1-w^2}, \frac{1}{2}(u^2-v^2)\right)\,,$$

pri čemer je $U = \{(u,v,w)\colon |w| < 1\}$. Naj bo $Q = [0,1]\times[0,1]\times[1/4,3/4] \subset U$ kvader na sliki 1a. Njegova slika $\Phi(Q)$ je na sliki 1b.



Sl. 1a Kvader Q.



Sl. 1b Slika $\Phi(Q)$.

a. (10) Izračunajte Jacobijevo determinanto preslikave Φ.

Rešitev: S parcialnim odvajanjem dobimo

$$D\Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} vw & uw & uv \\ v\sqrt{1-w^2} & u\sqrt{1-w^2} & -\frac{uvw}{\sqrt{1-w^2}} \\ u & -v & 0 \end{pmatrix}.$$

Z običajnimi prijemi izračunamo

$$J_\Phi(u,v,w) = -\frac{uv(u^2+v^2)}{\sqrt{1-w^2}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi gradient: 2 točki.*
- *Drugi gradient: 2 točki.*
- *Tretji gradient: 2 točki.*
- *Prijem za determinanto: 2 točki.*
- J_ϕ*: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana z

$$f(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Izračunajte

$$\int_{\Phi(Q)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Najprej izrazimo $f(x,y,z)$ *s spremenljivkami* u, v *in* w. *Računamo*

$$x^2+y^2=u^2v^2w^2+u^2v^2(1-w^2)=u^2v^2\,,$$

torej

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{uvw}{uv}=w\,.$$

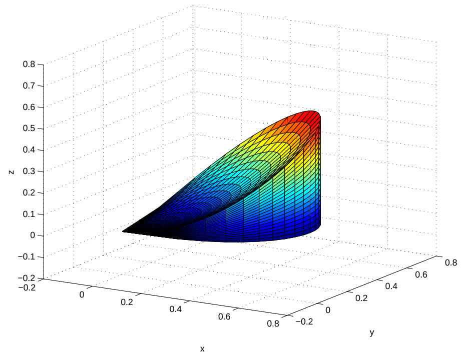
Uvedemo nove spremenljivke. Računamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\Phi(Q)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \int_Q w\,|J_\Phi(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&= \int_Q uv(u^2+v^2)\frac{w}{\sqrt{1-w^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&= \int_{1/4}^{3/4}\frac{w}{\sqrt{1-w^2}}\,\mathrm{d}w\int_{[0,1]\times[0,1]}uv(u^2+v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \int_{1/4}^{3/4}\frac{w}{\sqrt{1-w^2}}\,\mathrm{d}w\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1(u^3v+uv^3)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{15}-\sqrt{7})\cdot\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{16}(\sqrt{15}-\sqrt{7})\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da izrazimo* $f(x,y,z)$ *z* u,v,w: *3 točke.*
- *Račun: 3 točke.*
- *Nove spremenljivke z mejami: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Enojni integrali: 3 točke.*

2. (25) Območje G na sliki 2 naj omejujeta ploskvi $z = x^2 + y^2$ in $z^2 = xy$ za $x, y \geq 0$.



Sl. 2 Telo G definirano v besedilu naloge.

a. (15) Izračunajte prostornino telesa G.

Rešitev: Integracijsko območje bomo najlaže opisali v cilindričnih koordinatah. Dano območje se pretvori v

$$H = \{(r, \phi, z) \colon 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq \sqrt{\cos\phi \sin\phi}, r^2 \leq z \leq r\sqrt{\cos\phi\sin\phi}\}\,.$$

Vpeljemo nove spremenljivke in dobimo

$$\begin{aligned}
\int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_H r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} r\cdot\mathrm{d}r \int_{r^2}^{r\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} r(r\sqrt{\cos\phi\sin\phi} - r^2)\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{3}\cdot\cos^2\phi\sin^2\phi - \frac{1}{4}\cdot\cos^2\phi\sin^2\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{48}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\pi}{192}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nove meje pri cilindričnih koordinatah: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Srednji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_G xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

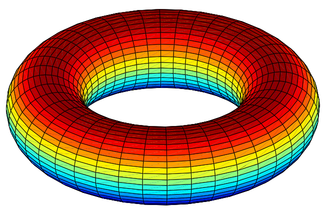
Rešitev: Računamo podobno kot v a.

$$\begin{aligned}
\int_G xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_H r^2 \cos\phi \sin\phi \cdot z \cdot r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos\phi \sin\phi}} r^3 \cdot \mathrm{d}r \int_{r^2}^{r\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} z \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} r^3 (r^2 \cos\phi \sin\phi - r^4) \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24} \int_0^{\pi/2} \cos^5\phi \sin^5\phi \, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{60} \, .
\end{aligned}$$

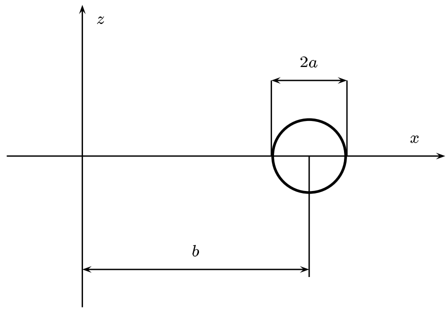
Ocenjevanje:

- *Nove meje pri cilnidričnih koordinatah: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Srednji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Na sliki 3a je torus s polmeroma a in b z $a < b$. Prerez torusa z xz ravnino je na sliki 3b.



Sl. 3a Torus.



Sl. 3b Presek torusa z xz-ravnino.

a. (10) Izračunajte maso torusa pod privzetkom, da je masna gostota konstantna in enaka ρ.

Namig: V cilindričnih koordinatah bo veljalo

$$b - \sqrt{a^2 - z^2} \leq r \leq b + \sqrt{a^2 - z^2}\,.$$

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate. Pri dani višini z mora biti

$$b - \sqrt{a^2 - z^2} \leq r \leq b + \sqrt{a^2 - z^2}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
m &= \rho \int_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \int_{b-\sqrt{a^2-z^2}}^{b+\sqrt{a^2-z^2}} r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\rho \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, \frac{r^2}{2}\Big|_{b-\sqrt{a^2-z^2}}^{b+\sqrt{a^2-z^2}} \\
&= 2\pi\rho \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, 2b\sqrt{a^2-z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= 4\pi b\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}\, a\cos u\,\mathrm{d}u \\
&= 4\pi a^2 b\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u \\
&= 4\pi a^2 b\rho \frac{\pi}{2} \\
&= 2\pi^2 a^2 b\rho\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobijeva determinanta: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Ostalo integriranje in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte masni vztrajnostni moment torusa okrog osi z, torej

$$I_{zz} = \rho \int_T (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Namig: Kot znano vzemite $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 u\, \mathrm{d}u = 3\pi/8$.

Rešitev: Kot prej uvedemo cilindrične koordinate. Računamo

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \rho \int_T (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \int_{b-\sqrt{a^2-z^2}}^{b+\sqrt{a^2-z^2}} r^3\, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi\rho \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z\, \frac{r^4}{4}\Big|_{b-\sqrt{a^2-z^2}}^{b+\sqrt{a^2-z^2}} \\
&= 4\pi b\rho \int_{-a}^{a} \left(b^2\sqrt{a^2-z^2} + (a^2-z^2)\sqrt{a^2-z^2}\right) \mathrm{d}z \\
&= 4\pi ab\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(ab^2 \cos u + a^3\cos^3 u\right) \cos u\, \mathrm{d}u \\
&= 4\pi ab\rho \left(\frac{\pi ab^2}{2} + \frac{3\pi a^3}{8}\right) \\
&= \frac{\pi^2 a^2 b\rho}{2}(4b^2 + 3a^2) \\
&= m\left(b^2 + \frac{3a^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Uvedba novih spremenljivk v integrand in Jacobi: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Ostali integrali in rezultat: 3 točki.*

4. (25) Predpostavite, da je zemlja okrogla in ima masno gostoto $\rho(x,y,z)$, ki je odvisna le od oddaljenosti od središča, torej

$$\rho(x,y,z) = \rho(r) = \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,.$$

a. (10) Naj bo polmer zemlje enak R. Označite $c = \int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r$. Pokažite, da je masa m_z zemlje enaka $4\pi c$.

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate. Dobimo

$$\begin{aligned} m_z &= \int_{K_R} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^R \rho(r)\,r^2\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\cdot 2\cdot c \\ &= 4\pi c\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Integral v kartezijskih koordinatah: 2 točki.*
- *Ideja s krogelnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Uvedba novih spremenljivk: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Sila, ki deluje na masno točko z maso m na višini h nad površjem zemlje, je enaka

$$F = mk\int_{K_R} \frac{(R+h-z)\,\rho(x,y,z)}{(x^2+y^2+(R+h-z)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Pokažite, da še vedno velja Newtonov sklep: sila na masno točko je takšna, kot da bi celotno maso zemlje strnili v središču.

Rešitev: V zgornji integral uvedemo krogelne koordinate. Računamo

$$\begin{aligned} F &= \int_{K_R} \frac{(R+h-z)\,\rho(x,y,z)}{(x^2+y^2+(R+h-z)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \frac{(R+h-r\cos\theta)\sin\theta}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo notranji integral. Uvedimo najprej novo spremenljivko $\cos\theta = u$, *potem pa še* $t = r^2 + (R+h)^2 - 2r(R+h)u$. *Dobimo*

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{(R+h-r\cos\theta)\sin\theta}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{R+h-ru}{(r^2+(R+h)^2-2r(R+h)u)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\int_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2} \frac{(R+h)^2-r^2+t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\Big(-2((R+h)^2-r^2)t^{-1/2}\Big|_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2} + 2t^{1/2}\Big|_{(R+h-r)^2}^{(R+h+r)^2}\Big) \\
&= \frac{1}{2r(R+h)^2}\big(4r+4r\big) \\
&= \frac{2}{(R+h)^2}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$F = km\cdot 2\pi\cdot\int_0^R r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r\cdot\frac{2}{(R+h)^2}$$

ali

$$F = \frac{kmm_z}{(R+h)^2}\,.$$

Newtonov sklep velja.

Ocenjevanje:

- *Krogelne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Per partes: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*