FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

15. januar 1999

Ime in priimek: ______________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo $f\colon (0,a)\times(0,1)\to\mathbb{R}$ zvezna in omejena funkcija. Preslikava Φ naj bo dana z

$$\Phi_1(u,v) = u+v \qquad \text{in} \qquad \Phi_2(u,v) = \frac{u}{u+v}\,.$$

a. (15) (10) Naj bo $H = \{(u,v) : 0 < u+v < a, b < u/(u+v) < c\}$ in $G = (0,a)\times(b,c)$ za $a > 0$ in $0 < b < c < 1$. Pokažite, da je

$$\int_G f(x,y)\,\frac{e^{-x}}{\sqrt{y(1-y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_H f(u+v,\frac{u}{u+v})\,\frac{1}{\sqrt{uv}}\,e^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Rešitev: Najprej potrebujemo $\mathrm{J}_\Phi(u,v)$. *Dobimo*

$$J_\Phi(u,v) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v/(u+v)^2 & -u/(u+v)^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{u+v}\,.$$

Ostanek je preprost. V integralu na desni nadomestimo x z $u+v$ in y z $u/(u+v)$, pomnožimo z $|\mathrm{J}_\Phi(u,v)|$ in dobimo integral na levi. Področje H je že tako izbrano, da ga preslikava Φ "prenese" v G.

Ocenjevanje:

- *Ideja kaj so nove spremenljivke: 3 točke.*
- *Jacobijeva determinanta: 3 točke.*
- *Pravilna vpeljava novih spremenljivk: 3 točke.*
- *Preverjanje, da se območja pravilno preslikajo: 3 točke.*
- *Fubinijev izrek: 3 točke.*

b. (10) Naj bo $f(x,y) = x^2y$. Izračunajte

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{b\to 0}\lim_{c\to 1}\int_G f(x,y)\,\frac{e^{-x}}{\sqrt{y(1-y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Iz a. dela naloge dobimo

$$\int_G f(x,y)\,\frac{e^{-x}}{\sqrt{y(1-y)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_H f(u+v,\frac{u}{u+v})\,\frac{1}{\sqrt{uv}}\,e^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Ta zadnji integral po Fubinijevem izreku "razpade" na produkt

$$\left(\int_0^a x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_b^c \sqrt{\frac{y}{1-y}}\,\mathrm{d}y\right)\,.$$

Ko $a\to\infty$, dobimo za prvi integral $\Gamma(3) = \int_0^\infty x^{3-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$ in ko $b\to 0$ in $c\to 1$ dobimo

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{y}{1-y}}\,\mathrm{d}y = B(3/2,1/2) = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Vpeljava novih spremenljivk: 2 točki.*
- *Fubinijev izrek: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Zunanji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (25) Območje G naj omejujeta ploskvi $z = x^2 + y^2$ in $z^2 = xy$ za $x, y \geq 0$.

a. (15) Izračunajte volumen področja G.

Rešitev: Integracijsko območje bomo najlaže opisali v cilindričnih koordinatah. Dano območje se pretvori v

$$H = \{(r, \phi, z) \colon 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq \sqrt{\cos\phi \sin\phi}, r^2 \leq z \leq r\sqrt{\cos\phi\sin\phi}\}\,.$$

Vpeljemo nove spremenljivke in dobimo

$$\begin{aligned} \int_G \mathrm{d}V &= \int_H r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} r\cdot \mathrm{d}r \int_{r^2}^{r\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} r(r\sqrt{\cos\phi\sin\phi} - r^2)\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{3}\cdot\cos^2\phi\sin^2\phi - \frac{1}{4}\cdot\cos^2\phi\sin^2\phi)\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{48}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\phi)\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{\pi}{192} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nove meje pri cilindričnih koordinatah: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Srednji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_G xyz\,\mathrm{d}V\,.$$

Rešitev: Računamo podobno kot v a.

$$\begin{aligned} \int_G xyz\,\mathrm{d}V &= \int_H r^2\cos\phi\sin\phi\cdot z\cdot r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} r^3\cdot\mathrm{d}r \int_{r^2}^{r\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} z\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} r^3(r^2\cos\phi\sin\phi - r^4)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{24}\int_0^{\pi/2} \cos^5\phi\sin^5\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{48}\cdot\frac{1}{60}\,. \end{aligned}$$

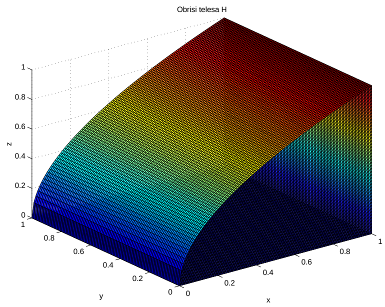
Ocenjevanje:

- *Nove meje pri cilnidričnih koordinatah: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Srednji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Naj bo H telo, ki ga omejujejo ravnine $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$ in parabolični valj $z^2 = x$, gostota mase pa naj bo $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cdot z$ za primerno konstanto z.

a. (10) Izračunajte maso telesa H.

Rešitev: Približni obrisi telesa H so na spodnji sliki.



Sl. 1 Obrisi telesa H.

Za izračun mase si pomagamo s Fubinijevim izrekom. Izračunati moramo integral

$$\begin{aligned} \int_H \rho_0 \cdot z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} z \, \mathrm{d}z \\ &= \rho_0 \int_0^1 \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\rho_0}{4} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s Fubinijem: 2 točki.*
- *Vrstni red pri Fubiniju: 2 točki.*
- *Posamezni integrali: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte masni vztrajnostni moment I_{xx} telesa H okrog osi x.

Rešitev: Računamo

$$
\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_H (x^2+y^2)\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\cdot z\,\mathrm{d}z \\
&= \rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 (x^2+y^2)\cdot \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}y\,(\frac{1}{8}+\frac{y^2}{4})\,\mathrm{d}y \\
&= \rho_0(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}) \\
&= \rho_0\frac{5}{24}
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Formula za I_{zz}: 3 točke.*
- *Ideja s Fubinijem: 3 točke.*
- *Vrstni red pri Fubiniju: 3 točke.*
- *Posamezni integrali: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Naj bo S ploskev, ki jo iz ploskve $z = \sqrt{x^2+y^2}$ izreže valj $x^2+y^2 = 2ax$.

a. (10) Izračunajte površino ploskve S.

Rešitev: Površino ploskve, ki je graf dane funkcije, izračunamo po formuli

$$P = \int_G \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

V našem primeru je $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *in* $G = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2ax\}$. *Uvedli bomo še polarne koordinate. Dobimo*

$$\begin{aligned}\int_G \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_G \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\cdot\pi\cdot a^2\end{aligned}$$

Integriranje niti ni potrebno, saj integriramo konstantno funkcijo po območju, ki je krog s polmerom a.

Ocenjevanje:

- *Formula za površino: 2 točki.*
- *Meje za polarne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*
- *Opomba: Točke po presoji, če kdo ugane.*

b. (15) Izračunajte

$$I = \int_S (xy+xz+yz)\,\mathrm{d}S\,.$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate in računamo

$$\begin{aligned}I &= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\int_0^{2a\cos\phi}(r^2\cos\phi\sin\phi + r\cos\phi\cdot r + r\sin\phi\cdot r)\cdot r\,\mathrm{d}r \\ &= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4a^4(\cos^5\phi\sin\phi+\cos^5\phi+\cos^4\phi\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi \\ &= 8\sqrt{2}a^4\int_0^1(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u \\ &= 8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{8\pi}{15} \\ &= \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}\end{aligned}$$

Dva od zgornjih integralov odpadeta, ker je funkcija, ki jo integriramo, liha na simetričnem intervalu.

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje v formulo: 3 točke.*
- *Polarne koordinate in Jacobian: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*