FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 3

2. kolokvij

15. januar 1999

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

RESITVE

1. (25) Preslikava $\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ naj bo dana z

$$\Phi_1(u,v)=\sqrt{\frac{u}{v}} \qquad \text{in} \qquad \Phi_2(u,v)=\sqrt{uv}\,.$$

a. (15) Naj bo $G=\{(x,y)\colon a\le xy\le b, c\le y/x\le d\}$ za $0<a<b$ in $0<c<d$. Pokažite, da za poljubno integrabilno funkcijo $f\colon G\to\mathbb{R}$ velja

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}u\int_c^d f(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv})\cdot\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v\,.$$

Rešitev: Iz besedila naloge sledi, da moramo uvesti novi spremenljivki u in v, torej

$$x=\Phi_1(u,v) \qquad \textit{in} \qquad y=\Phi_2(u,v)\,.$$

Izračunajmo najprej Jacobijevo determinanto:

$$J_\Phi(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2v}\,.$$

Zlahka se prepričamo, da preslikava Φ "prenese" pravokotnik $Q=[a,b]\times[c,d]$ v področje G, zato po pravilu za vpeljavo novih spremenljivk v integral funkcije dveh spremenljivk velja

$$\int_Q f(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv})\cdot\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Uporabimo še Fubinijev izrek in integral pretvorimo na želeno obliko.

Ocenjevanje:

- *Ideja kaj so nove spremenljivke: 3 točke.*
- *Jacobijeva determinanta: 3 točke.*
- *Pravilna vpeljava novih spremenljivk: 3 točke.*
- *Preverjanje, da se območja pravilno preslikajo: 3 točke.*
- *Fubinijev izrek: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_G \frac{y^3}{x}\cdot e^{-y(x^2+y^2)/x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitve: Uporabimo a. del naloge in računamo

$$\begin{aligned}\int_G \frac{y^3}{x}\cdot e^{-y(x^2+y^2)/(2x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \mathrm{d}u\int_c^d uv^2e^{-(u+uv^2)}\cdot\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{4}\int_a^b \mathrm{d}u\int_c^d 2uve^{-u(1+v^2)}\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{4}\int_a^b (e^{-(1+c^2)u}-e^{-(1+d^2)u})\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{(e^{-(1+c^2)a}-e^{-(1+c^2)b})}{4(1+c^2)}-\frac{(e^{-(1+d^2)a}-e^{-(1+d^2)b})}{4(1+d^2)}\,.\end{aligned}$$

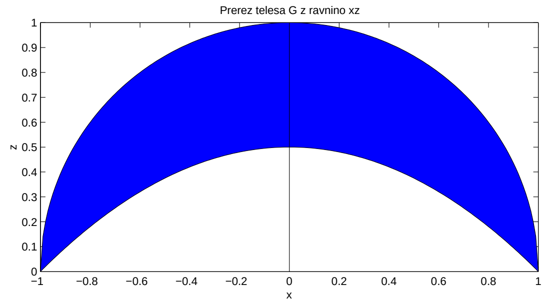
Ocenjevanje:

- *Vpeljava novih spremenljivk: 2 točki.*
- *Fubinijev izrek: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Zunanji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (25) Območje G naj omejujeta ploskvi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ in $x^2 + y^2 = R(R - 2z)$ za $z \geq 0$.

a. (15) Izračunajte volumen področja G.

Rešitev: Prerez območja G z xz ravnino je na spodnji sliki. Gre za območje, ki leži med zgornjo polovico krogle in grafom funkcije $g(x, y) = (R - (x^2 + y^2)/R)/2$ nad območjem $D = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq R^2\}$.



Sl. 1 Prerez G in xz-ravnine.

Nalogo lahko rešimo na več načinov. Tukaj jo bomo rešili tako s cilindričnimi kot s krogelnimi koordinatami.

- *Cilindrične koordinate (lažja varianta): Če vpeljemo cilindrične koordinate, področje preide v*

$$H = \{(r, \phi, z) \colon 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi, (R - r^2/R)/2 \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2}\}$$

Integral preide v

$$\begin{aligned}
\int_G \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \mathrm{d}r \int_{(R-r^2/R)/2}^{\sqrt{R^2-r^2}} r \cdot \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \cdot \int_0^R r \cdot (\sqrt{R^2 - r^2} - (R - r^2/R)/2) \, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} + \frac{R}{8}(R - r^2/R)^2 \right) \Big|_0^R \\
&= 2\pi \cdot (R^3/3 - R^3/8) \\
&= \frac{5\pi R^3}{12} \, .
\end{aligned}$$

- *Krogelne koordinate (težja varianta): Integral preide v*

$$\begin{aligned}
\int_G \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_{R/(1+\cos\theta)}^{R} r^2 \,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \left(1 - \frac{1}{(1+\cos\theta)^3}\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi R^3}{3} \left(-\cos\theta - \frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}\right) \Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2\pi R^3}{3} \cdot (1 - \frac{3}{8}) \\
&= \frac{5\pi R^3}{12}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nove meje pri novih koordinatah: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Srednji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte

$$\int_G x^2 z \,\mathrm{d}V \,.$$

Rešitev: Podobno kot prej lahko uvedemo cilindrične ali krogelne koordinate.

- *Cilindrične koordinate (lažja varianta): Integral preide v*

$$\begin{aligned}
\int_G z \,\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \mathrm{d}r \int_{(R-r^2/R)/2}^{\sqrt{R^2-r^2}} r^2 \cos^2\phi z \cdot r \cdot \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \,\mathrm{d}\phi \int_0^R r^3 \cdot \frac{1}{2}(R^2 - r^2 - (R - r^2/R)^2/4) \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2}(\frac{R^6}{12} - \frac{R^6}{96}) \\
&= \frac{\pi R^6}{192} \,.
\end{aligned}$$

- *Krogelne koordinate (težja varainta):*

$$
\begin{aligned}
\int_G x^2 z \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{R/(1+\cos\theta}^{R} r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi \cdot r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \int_{R/(1+\cos\theta)}^{R} r^5 \, \mathrm{d}r \\
&= \pi \cdot \frac{R^6}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \left(1 - \frac{1}{(1+\cos\theta)^6}\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi R^6}{6} \int_0^1 (1-u^2)u(1 - \frac{1}{(1+u)^6}) \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi R^6}{6} \int_1^2 (2v - v^2)(v-1)(1 - \frac{1}{v^6}) \, \mathrm{d}v \\
&= \frac{7\pi R^6}{6 \cdot 32}
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Nove meje pri novih koordinatah: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Srednji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Cilinder $H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ naj ima gostoto mase enako $\rho(x, y, z) = y^2 + z^2$.

a. (10) Izračunajte maso cilindra.

Rešitev: Uvedemo cilindrične koordinate in dobimo

$$\begin{aligned} m &= \int_H \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}V \\ &= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a (r^2 \sin^2 \phi + z^2) \cdot r\, \mathrm{d}r \\ &= (h \cdot \pi \cdot \frac{a^4}{4} + 2\pi \cdot \frac{h^3}{3}\frac{a^2}{2}) \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Meje za cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Srednji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte masni vztrajnostni moment I_{zz} cilindra H okrog osi z.

Rešitev: Izračunati je potrebno

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_H (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}V \\ &= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^a r^2 \cdot (z^2 + r^2 \sin^2 \phi) \cdot r\, \mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi h^3}{3}\frac{a^4}{4} + h\pi \frac{a^6}{6} \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za I_{xx}: 3 točke.*
- *Meje za cilindrične koordinate in Jacobian: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Srednji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Ploskev S naj bo definirana z $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ za $0 \leq z \leq 1$.

a. (10) Izračunajte površino ploskve S.

Rešitev: Površino ploskve, ki je graf dane funkcije, izračunamo po formuli

$$P = \int_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

V našem primeru je $f(x,y) = (x^2 + y^2)/2$ *in* $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. *Uvedli bomo še polarne koordinate. Dobimo*

$$\begin{aligned}
\int_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_G \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} \cdot r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\pi}{3} \cdot (3^{3/2} - 1)
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za površino: 2 točki.*
- *Meje za polarne koordinate: 2 točki.*
- *Fubini: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$\int_S z\,\mathrm{d}S\,.$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate in upoštevamo, da je $z = r^2/2$ *in dobimo*

$$
\begin{aligned}
\int_S z\,\mathrm{d}S &= \int_G z \cdot \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{2}\sqrt{1+r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+r^2}\cdot \frac{r^3}{2}\,\mathrm{d}r \\
&= \pi \cdot \int_0^{2} \sqrt{1+u}\cdot \frac{u}{2}\,\mathrm{d}u \quad Substitucija: r^2 = u \\
&= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_1^{3} \sqrt{v}(v-1)\,\mathrm{d}v \quad Substitucija: u+1 = v \\
&= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{5}v^{5/2} - \frac{2}{3}v^{3/2})\Big|_1^3 \\
&= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{5}(9\sqrt{3}-1) - \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)) \\
&= \pi \cdot (\frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{2}{15})
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje v formulo: 3 točke.*
- *Polarne koordinate in Jacobian: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*