FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

2. kolokvij

11. januar 2001

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

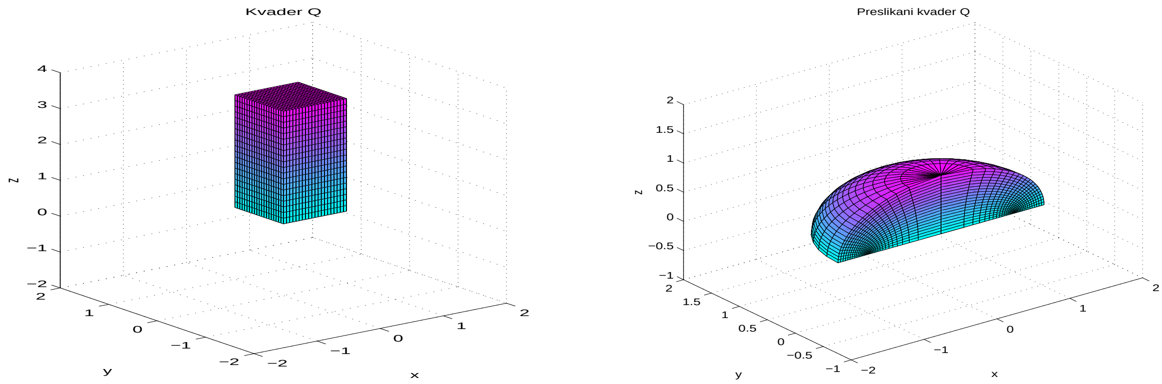
Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Preslikava Φ podana s predpisom

$$(u,v,\phi)\overset{\Phi}{\mapsto}\left(\sqrt{(1+u^2)(1-v^2)}\cos\phi,\sqrt{(1+u^2)(1-v^2)}\sin\phi,uv\right)$$

je definirana na $\mathbb{R}\times[-1,1]\times[0,2\pi]$ in preslika kvader $Q=[0,1]\times[-1,1]\times[0,2\pi]$ kot na sliki 1.



Slika 1 Kvader Q in njegova "slika" $\Phi(Q)$.

a. (15) Izračunajte Jacobian preslikave Φ.

Rešitev: Najprej izračunamo vse potrebne parcialne odvode.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_1}{\partial u} &= \frac{u\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1+u^2}}\cos\phi\\
\frac{\partial\Phi_1}{\partial v} &= -\frac{v\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-v^2}}\cos\phi\\
\frac{\partial\Phi_1}{\partial \phi} &= -\sqrt{(1+u^2)(1-v^2)}\sin\phi\\
\frac{\partial\Phi_2}{\partial u} &= \frac{u\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1+u^2}}\sin\phi\\
\frac{\partial\Phi_2}{\partial v} &= -\frac{v\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-v^2}}\sin\phi\\
\frac{\partial\Phi_2}{\partial \phi} &= \sqrt{(1+u^2)(1-v^2)}\cos\phi\\
\frac{\partial\Phi_3}{\partial u} &= v\\
\frac{\partial\Phi_3}{\partial v} &= u\\
\frac{\partial\Phi_3}{\partial \phi} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Izračunamo,

$$J_\Phi(u,v,\phi)=-u^2-v^2\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravilna izbira komponent: 3 točke.*
- *Parcialni odvodi prve komponente: 3 točke.*
- *Parcialni odvodi druge komponente: 3 točke.*
- *Parcialni odvodi tretje komponente: 3 točke.*
- *Determinanta: 3 točke.*

b. (15) Izračunajte prostornino telesa $\Phi(Q)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned} V &= \int_Q J_\Phi(u,v,\phi)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_Q (u^2+v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\phi \\ &= \pi \int_0^1 \left[\int_0^1 (u^2+v^2)\,\mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u \\ &= \pi \int_0^1 [u^2+\frac{1}{3}]\,\mathrm{d}u \\ &= \pi(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}) \\ &= \frac{2\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za volumen: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Prvo integriranje: 2 točki.*
- *Drugo integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (25) Naj bo H telo, ki ga dobimo kot presek krogle s polmerom $R = 1$ in središčem v izhodišču in pokončnim valjem s polmerom $\rho = 1/2$, središčem osnovne ploskve v točki $(1/2, 0, 0)$ in osjo vzporedno osi z. Valj naj ima višino $h = 1$.

a. (15) Izračunajte prostornino opisanega telesa.

Namig: Prostornina je integral funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *po območju* $G = \{(x, y)\colon (x - 1/2)^2 + y^2 \le 1/4\}$. *V polarnih koordinatah to območje preide v* $H = \{(r, \phi)\colon r \le \cos\phi, -\pi/2 \le \phi \le \pi/2\}$.

Rešitev: Računamo integral funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *na območju* $G = \{(x, y)\colon (x - 1/2)^2 + y^2 \le 1/4\}$. *Uvedemo polarne koordinate in dobimo*

$$\begin{aligned} V &= \int_G \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{dy} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} \sqrt{1 - r^2}\, r\, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \left[1 - (1 - \cos^2\phi)^{3/2}\right] \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin(\phi)^3\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate in Jacobian: 3 točke.*
- *Nove meje: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Razultat: 3 točke.*

b. (10) Površino dela krogle, ki ga "izreže" valj izračunamo z integralom

$$\int_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,,$$

kjer je $G = \{(x, y)\colon (x - 1/2)^2 + y^2 \le 1/4\}$. Izračunajte ta integral.

Rešitev: Podobno kot prej uvedemo polarne koordinate. Računamo

$$\begin{aligned} P &= \int_G \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\cos\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}\, r\, \mathrm{d}r \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\, (1 - \sqrt{1 - \cos^2\phi}) \\ &= \pi - 2\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Polarne koordinate in Jacobian: 2 točki.*
- *Nove meje: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Skozi kroglo s polmerom R zvrtamo okroglo luknjo s polmerom $R_1 < R$, tako da gre os luknje skozi središče krogle. Mislimo si, da je os luknje v smeri osi z, središče krogle pa v izhodišču koordinatnega sistema. Krogla naj ima masno gostoto $\rho = 1$.

a. (15) Izračunajte masni vztrajnostni moment te "preluknjane" krogle, torej

$$\int_{K_0} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

Rešitev: Uvedemo krogelne koordinate. Označimo $\alpha = \arcsin(R_1/R)$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
&\int_{K_0} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_\alpha^{\pi-\alpha} \mathrm{d}\theta \int_{R_1/\sin\theta}^{R} r^2 \sin^2\theta\, r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sin^3\theta\, \frac{1}{5}(R^5 - R_1^5/\sin^5\theta)\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \left[\frac{R^5}{5}(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta)|_\alpha^{\pi-\alpha}) + \frac{R_1^5}{5}\mathrm{ctg}(\theta)|_\alpha^{\pi-\alpha} \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{2R^5}{5}(\cos(\alpha) - \frac{1}{3}\cos^3(\alpha)) + \frac{2R_1^5}{5}\mathrm{ctg}(\alpha) \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{2R^5}{5}(\sqrt{1 - R_1^2/R^2} - \frac{1}{3}(1 - R_1^2/R^2)^{3/2}) + \frac{2R_1^5}{5} \cdot \frac{R\sqrt{1 - R_1^2/R^2}}{R_1} \right].
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Krogelne koordinate: 3 točke.*
- *Meje: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Integriranje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte prostornino preluknjane krogle.

Rešitev: Tokrat uvedemo cilindrične koordinate. Prostornina preluknjane krogle bo dvakrat prostornina zgornje polovice, to pa dobimo z integriranjem funkcije $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ *po kolobarju* $K = \{(x,y)\colon R_1^2 \le x^2 + y^2 \le R^2\}$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_K \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{R_1}^{R} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, \mathrm{d}r \\
&= 4\pi(-\frac{(R^2 - r^2)^{3/2}}{3}|_{R_1}^{R}) \\
&= \frac{4\pi(R^2 - R_1^2)^{3/2}}{3}.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Fubini: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (25) Potencialno energijo električnega polja E v delu prostora $G \subset \mathbb{R}^3$ izračunamo po formuli

$$E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \int_G E^2(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,,$$

kjer je $E(x,y,z)$ jakost električnega polja v točki (x,y,z), ϵ_0 pa je dielektrična konstanta.

a. (15) Naboj q v izhodišču generira električno polje z jakostjo

$$E(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\,.$$

Izračunajte E_p za kroglo z izhodiščem v točki $(0,0,2)$ in polmerom $R = 1$. Kot znano privzemite, da je

$$\int_0^1 \frac{r^2\, \mathrm{d}r}{(4-r^2)^2} = \frac{4 - 3\log(3)}{24}\,.$$

Rešitev: Premaknimo izhodišče koordinatnega sistema v $(0,0,2)$ *in uvedimo krogelne koordinate. Izračunati moramo integral*

$$\frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_K \frac{1}{(x^2+y^2+(z+2)^2)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

S krogelnimi koordinatami integral preide v

$$\begin{aligned}
&\frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r^2\, \mathrm{d}r}{(r^2+4+4r\cos\theta)^2} \\
&= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, \mathrm{d}\theta}{(r^2+4+4r\cos\theta)^2} \\
&= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_0^1 \mathrm{d}r \left[\frac{1}{4r(r^2+4+4r\cos\theta)}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{r^2\, \mathrm{d}r}{(4-r^2)^2} \\
&= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{4-3\log(3)}{24}\right).
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Translacija koordinatnega sistema: 3 točke.*
- *Krogelne koordinate: 3 točke.*
- *Prvi integral: 3 točke.*
- *Drugi integrael: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte še potencialno energijo polja zunaj neskončnega valja z osjo vzporedno osi z in polmerom $R = 1$.

Rešitev: Tokrat uvedemo cilindrične koordinate. Računamo

$$
\begin{aligned}
E_p &= \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_1^{\infty} \frac{r\ \mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^2} \\
&= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \left[-\frac{1}{2(r^2+z^2)}\Big|_1^{\infty} \right] \\
&= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)} \\
&= \frac{q^2}{16\epsilon_0}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Cilindrične koordinate: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Notranji integral: 2 točki.*
- *Zunanji integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*