FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 2

2. kolokvij

14. januar 2004

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

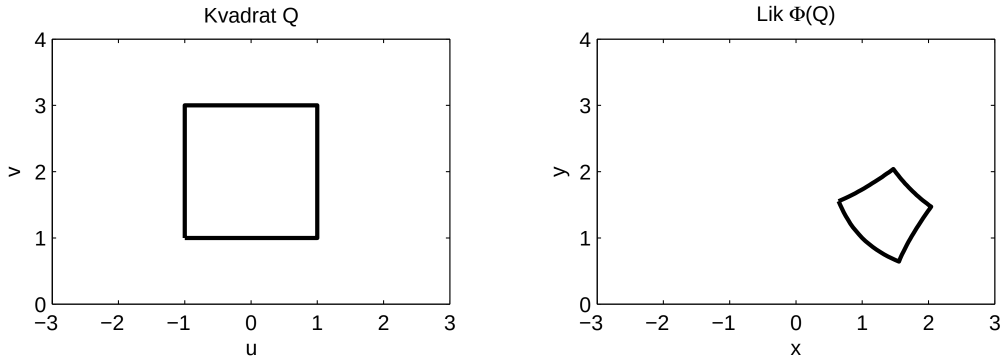
Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Preslikava Φ naj bo na področju $U = \{(u,v) \colon v > 0\}$ definirana s predpisom

$$(u,v) \overset{\Phi}{\mapsto} \left(\frac{v}{\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u}}, \sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u} \right).$$



Slika 1 Kvadrat Q (levo) in njegova slika $\Phi(Q)$ (desno).

a. (10) Izračunajte Jacobijevo matriko preslikave Φ.

Namig:

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}-u} = \frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{v^2}.$$

Zaradi preglednosti vpeljite oznaki

$$s = \sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u} \qquad \textit{in} \qquad d = \sqrt{u^2+v^2}.$$

Rešitev: Za Jacobijevo determinanto najprej izračunamo

$$D\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{v}{2ds} & \frac{s}{2d} \\ -\frac{s}{2d} & \frac{v}{2ds} \end{pmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} J_\Phi(u,v) &= \frac{1}{4d^2}\left(\frac{v^2}{s^2}+s^2\right) \\ &= \frac{1}{4d^2}\left(\frac{v^2}{\sqrt{u^2+v^2}-u}+\sqrt{u^2+v^2}-u\right) \\ &= \frac{1}{4d^2}\left(\frac{v^2\sqrt{u^2+v^2}+u}{v^2}+\sqrt{u^2+v^2}-u\right) \\ &= \frac{2\sqrt{u^2+v^2}}{4(u^2+v^2)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prva vrstica v $D\Phi$: 2 točki.*
- *Druga vrstica v $D\Phi$: 2 točki.*
- *Determinanta: 2 točki.*
- *Namig in poenostavitev: 2 točki.*
- *J_Φ: 2 točki.*

b. (15) Označite kvadrat $[-1,1]\times[1,3]$ s Q. Preslikava Φ "prenese" kvadrat Q v lik $\Phi(Q)$ na desni na sliki 1. Izračunajte integral

$$\int_{\Phi(Q)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Rešitev: Integral bomo izračunali z uvedbo novih spremenljivk. Postavimo

$$x=\frac{v}{\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u}}\qquad \textit{in}\qquad y=\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u}\,.$$

Izrazimo z upoštevanjem namiga v a. točki

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{v^2}{\sqrt{u^2+v^2}-u}+\sqrt{u^2+v^2}-x \\ &= \sqrt{u^2+v^2}+u+\sqrt{u^2+v^2}-u \\ &= 2\sqrt{u^2+v^2}\,. \end{aligned}$$

Po formuli za vpeljavo novih spremenljivk je

$$\int_{\Phi(Q)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_Q 2\sqrt{u^2+v^2}\cdot|J_\Phi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Ker se vsi členi pokrajšajo, je končni rezultat ploščina Q, ki je 4.

Ocenjevanje:

- *Novi spremenljivki: 3 točke.*
- *Izražava x^2+y^2: 3 točke.*
- *Kam deti J_Φ: 3 točke.*
- *Kam deti novi spremenljivki: 3 točke.*
- *Razultat: 3 točke.*

2. (25) Območje G naj bo krog dan s predpisom

$$G = \{(x,y)\colon (x-a)^2 + y^2 \le a^2\}\,.$$

za $a \ge 0$.

a. (15) Izračunajte

$$\int_G |xy| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate. Območje G se preslika v območje

$$H = \{(t,\phi)\colon \, -\pi/2 \le \phi \le \pi/2, 0 \le r \le 2a\cos\phi\}\,.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}
\int_G |xy| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_H r^3 |\cos\phi \sin\phi| \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^{2a\cos\phi} r^3 \, \mathrm{d}r \\
&= 2\frac{(2a)^4}{4}\int_0^{\pi/2} \sin\phi \cos^5\phi \, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{4a^4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s polarnimi koordinatami: 3 točke.*
- *Transformacija področja: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 3 točke.*
- *Rezultat: 2 točke.*

b. (10) Utemeljite, da je izlimitirani integral

$$\int_G |x|^{-1/2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dobro definiran in ga izračunajte.

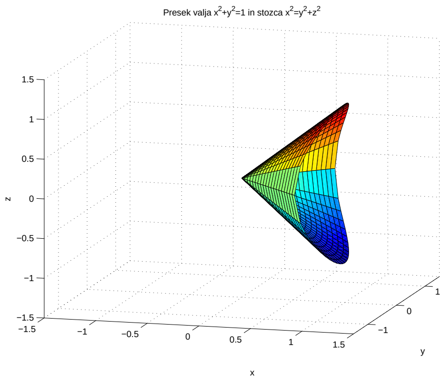
Rešitev: Integriramo nenegativno funkcijo, zato je vseeno, kako napihujemo področja, ki bodo zajela vse področje. Uvedemo polarne koordinate in dobimo podobno kot v a.

$$\begin{aligned}
\int_G |x|^{-1/2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_H \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\cos\phi}}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos\phi}}\, \mathrm{d}\phi \int_0^{2a\cos\phi} \sqrt{r}\, \mathrm{d}r \\
&= 4\frac{(2a)^{3/2}}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\phi\, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8\sqrt{2}a^{3/2}}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, zakaj izlimitirani integral dobro definiran: 2 točki.*
- *Transformacija področja: 2 točki.*
- *Jacobian: 2 točki.*
- *Uporaba Fubinijevega izreka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Neskončen valj v prostoru, dan z enačbo $x^2 + y^2 = 1$, iz stožca v prostoru, danega z enačbo $y^2 + z^2 = x^2$ za $x \geq 0$, "izreže" ploskev na sliki 1.



Slika 2 Presek stožca $y^2 + z^2 = x^2$ in valja $x^2 + y^2 = 1$.

a. (10) Površina ploskve je dana z integralom

$$P = 2\sqrt{2} \int_G \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \, dx \, dy \,,$$

kjer je $G = \{(x, y) \colon x \geq 0, |y| \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Izračunajte P.

Rešitev: Uvedemo polarne koordinate in računamo

$$\begin{aligned}
\int_G \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \, dx \, dy &= \sqrt{2} \int_0^1 r \, dr \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\phi}} \, d\phi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos\phi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\phi}} \, d\phi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{\sqrt{1 - 2u^2}} \\
&= \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} \\
&= \frac{\pi}{2} \,.
\end{aligned}$$

Površina opisane ploskve je π.

Ocenjevanje:

- *Ploskev kot graf: 2 točki.*
- *Formula za površino: 2 točki.*
- *Območje: 2 točki.*
- *Fubini in integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Kot znano privzemite, da je

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\phi)}\,\mathrm{d}\phi = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)},$$

kjer je $\Gamma(x)$ standardna gama funkcija. Izračunajte prostornino telesa, ki nastane s presekom neskončnega valja in stožca.

Namig: V cilindričnih koordinatah naj bo najbolj notranji integral po z.

Rešitev: V cilindričnih koordinatah opišemo telo kot

$$H = \{(r,\phi,z)\colon 0 \le r \le 1, -\pi/4 \le \phi \le \pi/4, -r\sqrt{\cos 2\phi} \le z \le r\sqrt{\cos 2\phi}\}.$$

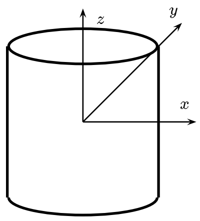
Računamo

$$\begin{aligned}
V &= \int_H r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \int_{-r\sqrt{\cos 2\phi}}^{r\sqrt{\cos 2\phi}} \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 2r^2\,\mathrm{d}r \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\phi)}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{2}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\phi)}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{3\Gamma(1/4)}.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Opis telesa v cilindričnih koordinatah: 3 točke.*
- *Formula za prostornino: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Notranji integral: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Valj postavimo v koordinatni sistem tako, kot kaže spodnja slika. Geometrijsko središče valja je v izhodišču koordinatnega sistema. Višina valja naj bo $2H$ in polmer osnovne ploskve R.



Slika 3 Položaj valja v koordinatnem sistemu.

a. (15) Izračunajte masni vztrajnostni moment valja I_{xx} okrog osi x za valj s konstantno masno gostoto ρ, torej

$$I_{xx} = \rho \int_V (y^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\,.$$

Rešitev: Vpeljemo cilindrične koordinate. Integral preide v

$$\begin{aligned}
\rho \int_V (x^2 + z^2)\, \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z &= \rho \int_{-H}^{H} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R (r^2 \sin^2 \phi + z^2) r \mathrm{d}r \\
&= \rho \int_{-H}^{H} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} (\frac{R^4}{4} \sin^2 \phi + \frac{R^2 z^2}{2}) \mathrm{d}\phi \\
&= \rho \int_{-H}^{H} (\frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 z^2)\, \mathrm{d}z \\
&= \rho(\frac{2\pi R^4 H}{4} + \frac{2\pi R^2 H^3}{3}) \\
&= \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{3}
\end{aligned}$$

Tukaj je m masa valja.

Ocenjevanje:

- *Uvedba cilindričnih koordinat: 3 točke.*
- *Preobrazba območja: 3 točke.*
- *Jacobian: 3 točke.*
- *Fubini: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_V \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\,.$$

Utemeljite, da je integral dobro definiran.

Rešitev: Spet uvedemo cilindrične koordinate. Integriramo ne-negativno funkcijo, zato bo integral dobro definiran, če obstaja.

$$
\begin{aligned}
\int_V \frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{-H}^{H}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^R \frac{r^2\cos^2\phi+z^2}{r} r\mathrm{d}r \\
&= \int_{-H}^{H}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}(\frac{R^3}{3}\cos^2\phi+Rz^2)\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-H}^{H}(\frac{\pi R^3}{3}+2\pi Rz^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{2\pi R^3 H}{3}+\frac{4\pi RH^3}{3}
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Uvedba cilindričnih koordinat: 2 točki.*
- *Preobrazba območja: 2 točki.*
- *Jacobian in Fubini: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da je integral dobro definiran: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*